

GÜ Fr. 11:30 oder 15:45 Abstimmung im Ilias
erster Termin 26.10.

Praktikum: 1 Versuch an 5 Terminen, 2 Hausaufgaben

1. Zyklus → PWB Mitte Jan

2. " → " " Feb

Musterprüfungsaufgaben, 2h Prüfung

Ilias-PW: Krt 12/13

I. Habitat im Sinne von Lyapunov

I.1 Definition und ein erster Ansatz

Wir betrachten im folgenden DGLn. der Form $\dot{x} = f(x)$
Dabei sei $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein einmal stetig diffb. Vektorfeld (Kurz: $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$)
Ein Punkt x^* heißt Ruhelage (RL) von $x = f(x)$, wenn $f(x^*) = 0$. Ohne Einschränkung
kann man annehmen $x^* = 0$. HA

Def. 1 Sei x^* eine RL von $\dot{x} = f(x)$ und bezeichne $s(t, x_0)$ die Lösung von $\dot{x} = f(x)$ mit Anfangswert x_0 . x^* heißt stabil (im Sinne von Lyapunov), wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ gibt, so dass gilt:

$$|x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \forall t \geq 0 : |s(t, x_0)| < \varepsilon$$

Eine Ruhelage die nicht stabil im Sinne von Lyapunov ist, heißt instabil.

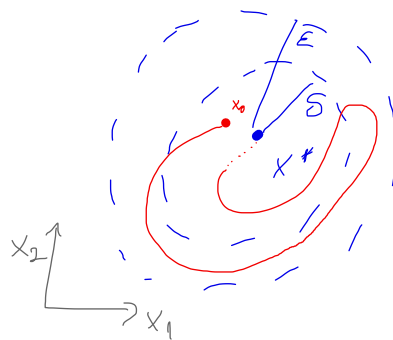
Die RL x^* heißt attraktiv (anziehend), wenn es ein $\eta > 0$ gibt, so dass gilt

$$|x_0| < \eta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} s(t, x_0) = 0$$

Eine RL heißt asymptotisch stabil, wenn sie stabil + attraktiv ist

Die RL heißt exponentiell stabil, falls es Konstanten $c, K, \alpha > 0$ gibt, so dass $\forall |x_0| < c$ gilt:

$$|s(t, x_0)| \leq K |x_0| e^{-\alpha t}$$



Habitat und Attraktivität sind zwei untersch. Konzepte. Genauer, eine RL kann attraktiv und gleichzeitig instabil sein.

Beispiel 2:

Vinograd

Sei $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Betrachte $\dot{x} = \frac{x^2(y-x) + y^5}{r^2(1+r^4)}$

HA: 0 ist einzige Ruhelage
 $\dot{y} = \frac{y^2(y-2x)}{r^2(1+r^4)}$

Man kann zeigen: • jede Lösung konvergiert in den Ursprung (d.h. 0)

- für $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ gilt: $\forall \delta > 0$ gibt es ein $x_0 \in B_\delta(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < \delta\}$ so dass $s(t; x_0)$ die Menge $B_\delta(0)$ verlässt. d.h. RLO ist nicht stabil.



3. Beispiel:

Harmonischer Oszillator

Die DGLn des harmonischen Oszillators gegeben durch

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Die EW der charakt. Gleichung $(\lambda^2 + \omega_0^2 = 0)$ sind $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$

d.h. die Lösung der DGL ist $x(t) = a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \sin(\omega_0 t)$

Mit $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ ergibt sich unmittelbar $a_1 = x_0$ und $a_2 = \frac{v_0}{\omega_0}$

d.h. in der x - $\dot{x}$ -Ebene sind die Lösungen konzentrische Kreise. Startet man in ε -Entfernung vom Ursprung, bleibt man immer ε entfernt. Somit ist die RL=0 mit $\delta = \varepsilon$ stabil. Der Ursprung ist aber nicht attraktiv.



Sei $\dot{x} = f(x)$ eine DGL mit einer asymptotisch stabilen Linearisierung um die RL x^* . Zuerst schreiben wir die DGL um. Setze $A := Df(x^*)$ ($= Df(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}|_{x=x^*}$)

$$g(x) = f(x) - A(x - x^*) \text{ und } y = x - x^*, \text{ dann gilt } \dot{y} = Ay + g(y)$$

Weil f stetig diffbar ist, gilt wg. des Satzes von Taylor, dass für jedes $r > 0$ ein $\delta(r) > 0$ existiert, so dass $|y| \leq \delta(r) \Rightarrow |g(y)| \leq r|y|$ mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten erhalten wir $\oplus$

$$y(t) = e^{tA} y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} g(y(s)) ds \quad (L)$$

Weil $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ für alle EW λ_i gilt, $\exists \alpha > 0$: $\text{Re}(\lambda_i) < -\alpha < 0$

Des Weiteren gilt, für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ gibt es ein $K > 0$, so dass gilt

$$|e^{tA} \cdot v| \leq K \cdot e^{-\alpha t} \cdot |v| \quad \text{für } t > 0 \quad \textcircled{*}$$

$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$ angenommen v ist EV, d.h. $A \cdot v = \lambda v$, dann folgt $\textcircled{*}$ sofort durch einsetzen.

Falls $y \in S$ ist, gilt mit $\oplus$ und $\textcircled{*}$ folgt aus (L)

$$|y(t)| \leq K \cdot e^{-\alpha t} |y_0| + K_f \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} |y(s)| ds$$

Setze $\xi(t) = e^{\alpha t} |y(t)|$. Dann gilt:

$$\xi(t) \leq K \cdot \delta + K_f \int_0^t \xi(s) ds \quad (**)$$

4. Lemma: Sei $g, k: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $a > 0$, $k(t) \geq 0$. Angenommen
Grönwall $g(t) \leq C + \int_0^t k(s) \cdot g(s) ds$ für alle $0 \leq t \leq a$.

Dann gilt für alle $t \in [0, a]$
 $g(t) \leq C \cdot e^{\int_0^t k(s) ds}$

Beweis: $G(t) = C + \int_0^t k(s)g(s) ds$ g, k stetig $\Rightarrow g$ stetig diffbar, $G(0) = C$.
 Es gilt $\frac{d}{dt} G(t) = k(t)g(t) \leq k(t)G(t)$, d.h. $G - kG \leq 0$
 Multiplikation mit $e^{-\int_0^t k(s) ds}$ ergibt $e^{-\int_0^t k(s) ds} \cdot (G - kG)$
 $= \frac{d}{dt} (G(t) e^{-\int_0^t k(s) ds}) \leq 0$. Integration liefert $G(t) \leq C \cdot e^{\int_0^t k(s) ds}$
 weil $g(t) \leq G(t)$, gilt die Behauptung. $\square$

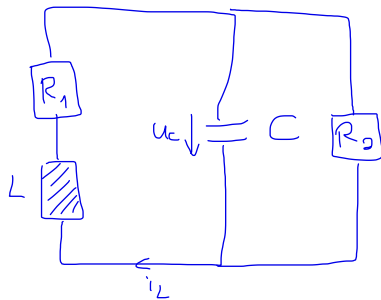
Wir verwenden Lemma 4 um (*) abzuschätzen

$\xi(t) \leq k\delta + k_f \int_0^t \xi(s) ds \Rightarrow \xi(t) \leq k\delta e^{k_f t} \Rightarrow |y(t)| \leq \delta e^{-(\alpha - k_f)t}$
 d.h. solange $\alpha < \frac{1}{k}$, gilt $|y(t)| \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ und $y(t)$ bleibt durch k_f beschränkt $\forall t \geq 0$. Ist $|y_0| < \delta$, dann gilt $|y(t)| < k\delta =: \varepsilon$

5. Satz Sei f einmal stetig diffbar und bezeichne mit A die Matrix der Linearisierung um x^* . Angenommen die Realteile der EW von A sind negativ, dann ist x^* asy. stabil.
 $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x^*}$

I.2 Direkte Methode von Lyapunov.

6. Beispiel:



$$\frac{d}{dt} i_L = \frac{1}{L} (-U_c - R_1 i_L)$$

$$\frac{d}{dt} U_c = \frac{1}{C} \left(i_L - \frac{U_c}{R_2} \right)$$

RL von $\dot{x} = Ax$: $\Rightarrow$ RL in $(0,0)$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-L - CR_2 \pm \sqrt{(L + CR_2)^2 - 4CLR_2(1 + R_1R_2)}}{2CLR_2}$$

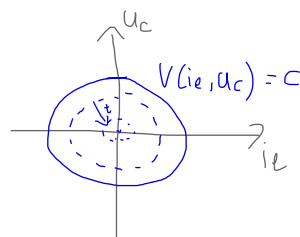
Man sieht nach „kurzer“ Rechnung, dass das System für alle positiven Parameter asy. stabil ist.

Sei $V = \frac{1}{2} L i_e^2 + \frac{1}{2} C u_c^2$. V ist die Energie, die in der Kapazität und der Induktivität gespeichert ist.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(i_e(t), u_c(t)) &= L \cdot i_e \frac{d}{dt} i_e + C \cdot u_c \frac{d}{dt} u_c \\ &= i_e (-u_c - R_1 i_e) + u_c (i_e - \frac{u_c}{R_2}) \\ &= -\frac{R_1}{L} \cdot L \cdot i_e^2 - \frac{1}{R_2 C} \cdot C \cdot u_c^2 \end{aligned}$$

$$\leq -2 \cdot \max \left\{ \frac{R_1}{L}, \frac{1}{R_2 C} \right\} \cdot V$$

$$\dot{V} \leq -2\alpha \cdot V \Rightarrow V(t) \leq C e^{-2\alpha t} \text{ mit } C = \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{2} L \cdot i_e(0) \\ \frac{1}{2} C \cdot u_c(0) \end{pmatrix} \right|$$

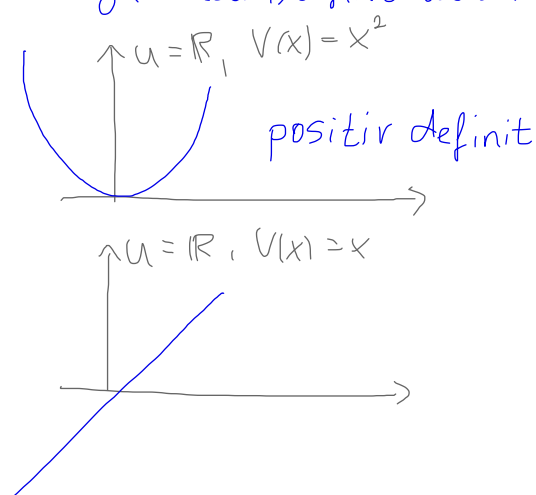


7. Def: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von 0 . Eine Funktion $V: U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt lokal positiv definit, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

- i) V ist stetig diffbar, also $V \in C^1(U, \mathbb{R})$
- ii) $V(0) = 0$
- iii) $V(x) > 0 \quad \forall x \in U \setminus \{0\}$

V heißt lokal positiv semidefinit, wenn statt iii) gilt:
iii') $V(x) \geq 0 \quad \forall x \in U \setminus \{0\}$

Ist $U = \mathbb{R}^n$, so sprechen wir von positiv (semi)definiten Funktionen. Negativ (semi)definit werden analog definiert.



Ist V weder positiv noch negativ (semi)definit, dann heißt V indefinit.
($\exists x_1, x_2: V(x_1) > 0$ und $V(x_2) < 0$)

$V(x) = 1+x, U = (-1, \infty)$ nicht definit, weil $V(0) \neq 0$

Im el. Schaltkreis haben wir die Änderungen der Energiefunktion V mit der Zeit betrachtet. Das können wir weiter formalisieren. Sei also $\dot{x} = f(x)$ mit $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und V eine stetig diffbare Funktion. $V: U \rightarrow \mathbb{R}$. Ist $s(t; x_0)$ eine Lösung von $\dot{x} = f(x)$ dann gilt:

$$\frac{d}{dt} V(s(t; x_0)) = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{d}{dt} s(t; x_0) = \frac{\partial V}{\partial x} f(s(t; x_0)) \quad (*)$$

Ableitung von V entlang dem Vektorfeld f

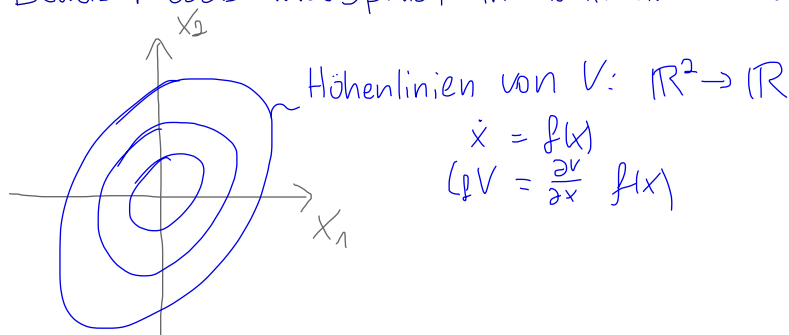
Wir definieren die Lie-Ableitung von V in Richtung von f durch $L_f V = \frac{\partial V}{\partial x} f$

9. Bemerkung: Man schreibt wegen $*$ auch oft $\dot{V}$ statt $L_f V$

10. Satz:

Sei $x^* = 0$ eine Ruhelage von $\dot{x} = f(x)$ und D eine offene Umgebung von 0 . Gibt es ein auf D positiv definites $V: D \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $L_f V$ negativ semidefinit auf D ist, dann ist $x^* = 0$ stabil. Ist $L_f V$ auf D negativ definit, dann ist $x^* = 0$ asymp. stabil.

Beweis mittels Widerspruch in nonlinear control.



11. Beispiel:

Sei $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $V \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $V(0) = 0$ und $V(x) > 0$ für $x \neq 0$

Betrachte $\dot{x} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T$ d.h. $f(x) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T$

Weil V stetig diffbar ist und ein globales Minimum in $x=0$ hat, ist $x^* = 0$ RL der Dgl. Untersuche die Stabilität von x^*

Wir untersuchen die Stabilität von $x^* = 0$ mit V :

$$L_f V = \frac{d}{dt} V = \frac{\partial V}{\partial x} \left(-\frac{\partial V}{\partial x}^T \right) = - \left| \frac{\partial V}{\partial x} \right|^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1} \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial x_k} \right)^2 = \left(\left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial x_k} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2$$

Dann ist $L_f V$ lokal negativ definit und damit ist $x^* = 0$ asymp. stabil.

I.3 Einzugsbereich

Bis jetzt können wir die Stabilität einer RL feststellen. Allerdings wissen wir nur, dass die Auslenkung (oder Störung) der Lösungen um die RL x^* klein sein müssen. Um dies besser zu quantifizieren, definieren wir:

13. Definition Sei x^* eine asymp. stabile RL von $\dot{x} = f(x)$. Dann heißt die Menge $R = \{x_0 \in U \mid \lim_{t \rightarrow \infty} s(t; x_0) = x^*\}$ der Einzugsbereich von x^* . Gilt $R = \mathbb{R}^n$, dann heißt x^* asymp. stabil.

Ruhelage immer im Ursprung: $y = x - x^* \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \dot{y} = \frac{dx}{dt} - \underbrace{\frac{dx^*}{dt}}_{=0} = f(x) = f(y + x^*)$

$$\bar{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad y \mapsto \bar{f}(y) = f(y + x^*) \Rightarrow \dot{y} = \bar{f}(y) \\ \Rightarrow \bar{f}(0) = f(0 + x^*) = 0$$

Direkte Methode von Lyapunov. $V: U \rightarrow \mathbb{R}$ so dass V pos. def. $U \subseteq \mathbb{R}^n$
und $L_f V = \dot{V}$ neg. sem. def. dann ist $x^* = 0$ stabil f. $\dot{x} = f(x)$

14. Beispiel:
(5. Blatt)

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) = -\frac{6x_1}{(1+x_1^2)^2} + 2x_2$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) = -\frac{2(x_1 + x_2)}{(1+x_1^2)^2}$$

$$V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \mapsto \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2 \quad \text{pos. def.}$$

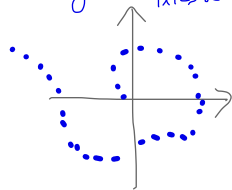
$$V = L_f V = -\frac{4}{(1+x_1^2)^2} \left(\frac{3x_1^2}{(1+x_1^2)^2} + x_2^2 \right) < 0 \text{ f. } x_1, x_2 \neq 0$$

$\leadsto$ Phasenportrait siehe Blatt

15. Definition:

$$V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

Gilt $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$, dann heißt V radial unbeschränkt.



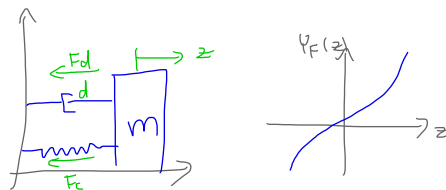
16. Satz: Sei $x^* = 0$ eine RL von $\dot{x} = f(x)$. Existiert ein positiv definites, radial unbeschränktes $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $\dot{V} = L_f V$ negativ definit ist, dann ist $x^* = 0$ global asymptotisch stabil.

17. Definition: Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt positiv invariante Menge von $\dot{x} = f(x)$, wenn aus $x_0 \in D$ folgt, dass $s(t; x_0) \in D \quad \forall t \geq 0$.

18. Bemerkung: Eine (untere) Abschätzung des Einzugsbereichs erhält man wie folgt:
Sei $D \subset U$ ein Gebiet mit $x^* \in D$ auf dem $V: U \rightarrow \mathbb{R}$ positiv definit und $\dot{V} = L_f V$ negativ definit ist. Jede beschränkte Niveaumenge $H_c = \{x \in U \mid V(x) \leq c\}$ ist eine Abschätzung für den Einzugsbereich.

I.4 Das Invarianzprinzip

19. Beispiel: Betrachte einen Feder-Masse-Schwinger mit linearer Dämpfungskraft $F_d = d \dot{z}$ mit $d \in \mathbb{R}, d > 0$ und eine nichtlineare Federkraft $F_c = \psi_F(z)$ mit $k_1 z^2 \leq z \cdot \psi_F(z) \leq k_2 z^2$



Bewegungsgleichungen: $m\ddot{z} + d\dot{z} + \psi_F(z) = 0$

In ZRD mit $v = \dot{z}$
 $\dot{v} = -\frac{1}{m} (\psi_F(z) + dv)$ (*)

Die einzige Ruhelage des Systems ist bei $(0,0)$

$$V = \frac{1}{2}mv^2 + \int_0^z \psi_F(\xi) d\xi$$

$$L_f V = mv\dot{v} + \psi_F(z) \cdot \dot{z} \stackrel{(*)}{=} -v \cdot \psi_F(z) - dv^2 + v \cdot \psi_F(z) = -dv^2$$

$\Rightarrow$ negativ semidefinit und damit nach der direkten Methode Stabilität von $(0,0)$

Wir wissen aber, wenn die Kennlinie der Feder linear ist, dann ist die RL $(0,0)$

asympt. stabil. Wie sieht es im nichtlinearen Fall aus? Solange $v(t) \neq 0$

nimmt V ab. Betrachten wir also eine Lösung, bei der $v(t) \equiv 0$ (also identisch Null)

gilt. Ist $v(t) \equiv 0 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \psi_F(z(t)) \equiv 0$, aber das kann nur gelten, wenn $z(t) \equiv 0$

ist. Somit ist die RL asympt. stabil.

20. Bemerkung:

Im Feder-Masse-Beispiel wissen wir, dass alle Lösungen innerhalb einer beschränkten Niveau-Menge H_c von V verlaufen. Weiterhin konvergiert jede dieser Lösungen gegen die Menge $\{x \in H_c \mid L_f V(x) = 0\}$. Wir wollen ausschließen, dass weitere Lösungen neben der RL existieren, die in dieser Menge verlaufen.

21. Satz:

Invarianzprinzip von Krasovski - LaSalle

Sei $V: U \rightarrow \mathbb{R}$ positiv definit und $\dot{V} = L_f V$ negativ semidefinit.

Falls keine nicht-triviale Trajektorie $x(t) \neq 0$ in U existiert, die identisch in $E = \{x \in U \mid L_f V(x) = 0\}$ verläuft, dann ist $x^* = 0$ asy. stabil.

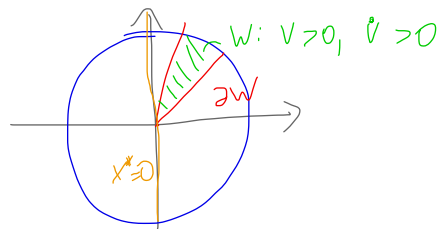
Bisher können wir nur die Stabilität einer RL überprüfen. In manchen Fällen möchte man die Stabilität einer RL ausschließen.

22. Satz:

Sei $x^* = 0$ eine RL von $\dot{x} = f(x)$, $f: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$. Weiterhin sei $V: U_2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U_2 \subseteq U_1$ eine Funktion und $W = \{x \in U_2 \mid V(x) > 0\}$ so dass gilt:

- $0 \in \partial W$ (∂W heißt Rand von W)
- W ist in einem hinreichend kleinen Ball um $x^* = 0$ enthalten.
- $L_f V > 0$ f. $x \in W$

Dann ist $x^* = 0$ instabil.



23. Beispiel:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^3 + x_2^2 x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2^3 + x_2 x_1^2\end{aligned}$$

Sei $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1^2 - \frac{1}{2} x_2^2$. Es gilt $V > 0$ wenn $x_1^2 > x_2^2$ also ist $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid x_1 > x_2 > -x_1 \right\}$

Es gilt $0 \in \partial W$ und W ist in einem Ball um die Null enthalten.

$$L_f V = x_1 \dot{x}_1 - x_2 \dot{x}_2 = x_1^4 + x_2^2 x_1^2 + x_2^4 - x_2^2 x_1^2 = x_1^4 + x_2^4$$

Also ist $L_f V > 0$ für $x \in W$ und somit ist $x^* = 0$ instabil.

Beispiel:

zu LaSalle

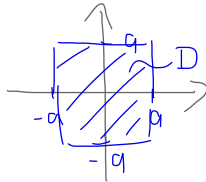
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -g(x_1) - h(x_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g, h: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ g(0) &= 0, h(0) = 0\end{aligned}$$

$$x \cdot g(x) > 0 \text{ für } x \in (-a, a) \setminus \{0\}$$

$$x \cdot h(x) > 0 \text{ für } x \in (-a, a) \setminus \{0\}$$

$$\text{Setze } D = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, -a < x_1 < a, -a < x_2 < a \}$$



Für eine Ruhelage muss gelten: $x_2 = 0$ und damit wegen $g(x_1) = -h(x_2)$ auch $x_1 = 0$.

Untersuche die Stabilität der Ruhelage $(0,0)$. Verwende als Kandidat für die Lyapunovfunktion $V(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} g(x) dx + \frac{1}{2} x_2^2$

$$\begin{aligned}\dot{V} &= L_f V = g(x_1) \dot{x}_1 + x_2 \cdot \dot{x}_2 \\ &= g(x_1) x_2 + x_2 (-g(x_1) - h(x_2)) \\ &= -x_2 \cdot h(x_2)\end{aligned}$$

Weil $-x_2 \cdot h(x_2)$ negativ für $x_2 \neq 0$ ist $\dot{V}$ negativ semidefinit.

$$\text{Somit ist } E = \{x \in D \mid \dot{V}(x) = 0\} = \{x \in D \mid h(x_2) x_2 = 0\} = \{x \in D \mid x_2 = 0\}$$

Eine Lösung die identisch in E verläuft erfüllt also $x_2(t) \equiv 0$

Damit gilt auch $\dot{x}_1(t) \equiv 0$, also $-g(x_1(t)) - h(x_2(t)) = -g(x_1(t)) \equiv 0$.

Somit muss auch $x_1(t) \equiv 0$ gelten. Damit ist $(0,0)$ asympt. stabil.

Nachtrag zu §1:

Die indirekte Methode von Lyapunov

24 Satz: Sei $x^* = 0$ eine Ruhelage von $\dot{x} = f(x)$ und $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$
Setze $A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0} = x^*$

Es gilt:

- a) Ist der Realteil aller Eigenwerte λ_k von A negativ (also $\operatorname{Re}(\lambda_k) < 0$) dann ist die RL asympt. stabil.
- b) Gibt es einen EW von A dessen Realteil positiv ist ($\operatorname{Re}(\lambda_k) > 0$) dann ist die RL instabil.

25 Bemerkung: Sei $x^* = 0$ eine RL von $\dot{x} = f(x)$ und sei die Linearisierung um x^* gegeben durch $\dot{y} = Ay$. Gibt es einen EW von A dessen Realteil gleich Null ist, so kann mittels der Linearisierung von Lyapunov keine Aussage über die Stabilität der RL getroffen werden.

§ 6 Lyapunov - Theorie und lineare Systeme

Wir wollen die Erkenntnisse aus der Lyapunovtheorie auf lineare Systeme anwenden.

Sei also im Folgenden die DGL $\dot{y} = Ay$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben.

26. Definition:

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt positiv definit, wenn $x^T A x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt. Ist $x^T A x \geq 0$, so nennt man A pos. semidefinit.

Hausaufgabe

z.z. Die Diagonalelemente pos. def. Matrizen sind positiv.

Sei nun $V(x) = x^T P x$ wobei P eine positiv definite Matrix ist. $\dot{V}(x) = L_A V = x^T (PA + A^T P) x$

Angenommen, die RL 0 ist asy. stabil, dann gilt $L_A V$ ist negativ definit. Das heißt $PA + A^T P$ ist negativ definit. $\Rightarrow$ es gibt ein positiv def. Q so dass

$$\textcircled{*} x^T (PA + A^T P) x = -x^T Q x \quad \text{gilt.}$$

Wir wollen die Beobachtung f. ein neues Stabilitätskriterium f. lineare Systeme verwenden.

27. Definition:

Eine Matrix A heißt Hurwitzmatrix, wenn für alle EW λ_k von A gilt $\operatorname{Re}(\lambda_k) < 0$.

28. Satz z:

Eine Matrix A ist genau dann eine Hurwitzmatrix, wenn die Gleichung $A^T P + PA + Q = 0$ für jede positiv definite Matrix Q eine eindeutige positiv definite Lösung P besitzt.

Beweis:

Wenn für jedes positiv definites Q eine eindeutige, positiv definite Lösung P existiert, dann ist nach der direkten Methode von Lyapunov die RL $x^* = 0$ asy. stabil. Dann sind aber auch die Realteile der EW von A negativ.

Sei umgekehrt A eine Hurwitzmatrix. Seien λ_k die EW von A . Weil A Hurwitz ist, gilt $\operatorname{Re}(\lambda_k) < 0$. Die Einträge $\exp(A^T t)$ und $\exp(At)$ sind von der Form $t^{m-1} \cdot e^{\lambda_k t}$. Dann existiert für ein positiv definites Q die Matrix $P = \int_0^\infty \exp(A^T t) \cdot Q \cdot \exp(At) dt$.

Ist Q positiv definit, dann auch P . Denn aus

$$x^T P x = \int_0^\infty \underbrace{x^T \exp(A^T t) \cdot Q \cdot \exp(At) x}_{>0} dt \quad \text{folgt } x^T P x > 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

$$\begin{aligned} \text{Weiterhin gilt: } A^T P + PA &= \int_0^\infty A^T \exp(A^T t) \cdot Q \cdot \exp(At) + \exp(A^T t) \cdot Q \cdot \exp(At) A dt \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt} (\exp(A^T t) \cdot Q \cdot \exp(At)) dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \exp(A^T t) Q \cdot \exp(At) - Q = -Q \end{aligned}$$

Somit muss noch die Eindeutigkeit von P gezeigt werden. Sei also $\bar{P}$ pos. def. und $A^T \bar{P} + \bar{P} A + Q = 0$. Sei $\tau: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$
 $X \mapsto X^T P X - X^T \bar{P} X - X^T (P - \bar{P}) X$. Für eine beliebige Lösung $S(t, x_0)$
von $\dot{X} = AX$ gilt $L_f F = \frac{d}{dt} F(S(t, x_0))$. Das heißt mit
 $\dot{F}(x) = \dot{X}^T (P - \bar{P}) X + X^T (P - \bar{P}) \dot{X}$
 $= X^T (A(P - \bar{P}) + (P - \bar{P})A) X$
 $= X^T (\underbrace{A^T P + PA}_{=Q} - \underbrace{(A^T \bar{P} + \bar{P} A)}_{=Q}) X = 0$

Das heißt $F(x)$ bleibt konstant entlang von Lösungen von $\dot{X} = AX$
Man ist $\exp(At)$ eine Lösung von $\dot{X} = AX$ (HA: einmal ableiten + einsetzen)
d.h. $\forall t$ gilt $F(\exp(At)) = \text{const.}$ Weiterhin ist $F(0) = P - \bar{P}$.
Weil F stetig ist, gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} F(\exp(At)) = F(\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(At)) = F(0) = 0$
Damit folgt direkt $F(0) = F(0) = P - \bar{P} = 0 \Rightarrow P = \bar{P}$

29. Bemerkung:

Somit gilt, ist $\dot{X} = AX$ asympt. stabil, dann gibt es auch
eine quadr. Lyapunovfunktion V_1 also ein pos. def. P mit $V(x) = x^T P x$.

Optimale Regelung

1. Überblick und Beispiele
2. Reglerentwurf durch Minimierung eines quadr. Gütefunktional (LQR)
3. Eigenschaften des LQR
4. Optimal Tracking
5. Optimale Filterverfahren (Kalmanfilter)

1. Überblick und Beispiele

1.1. Beispiele

A) Optimale Unterdrückung von Störungen



Gegeben: Strecke G

Gesucht: Regler K , so dass Einfluss der Störung z auf Ausgang y „klein“

$$\min_K \max_{\|z\|_2 \leq 1} \|y\|_2$$

worst case

$$\|z\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty |z(t)|^2 dt}$$

$$\|z\|_\infty = \sup_{t \in [0, \infty)} |z(t)|$$

B) Optimales Ausregeln von AB

Beispiel:

Modell: $\ddot{x} = u - p \dot{x}$
 $x(0), \dot{x}(0)$ gegeben

<u>Mögliche Probleme:</u>	<u>Name</u>	<u>Kostenfunktion</u>	<u>Beschränkungen</u>
• Minimale Energie		$J = \int_0^T u^2 dt$	$x(T)=0, \dot{x}(T)=0$ $\leadsto$ Fahrzeug am Ziel in Ruhe
• Minimale Zeit		T	$x(T)=\dot{x}(T)=0$ $ u(t) < 1$ Eingangsbeschr.
• Quadratisches Gütekriterium		$J = \int_0^\infty x(t)^2 + \lambda u(t)^2 dt$	Beschränkungen mögl.

12. Einordnung

A) Statische Optimierung

$$\min_u J(u) \quad u \in \mathbb{R}^n$$

s.t. $h(u) \geq 0$ Ungleichungs-NB

$g(u) = 0$ Gleichheits-NB

u ist endlich-dimensional. J ist Funktion

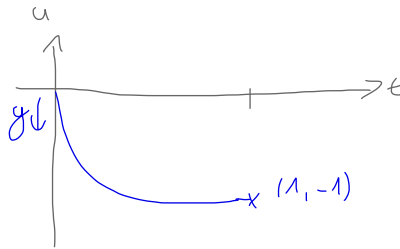
B) Variationsrechnung

$$\min_{u(\cdot)} J(u) = \int_0^1 F(t, u(t)) dt$$

$u: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, u ist Funktion!
 $\Rightarrow u$ unendlich-dimensional

J funktional

Beispiele: Brachistochrone



Gesucht: Kurve zw. $(0,0)$ und $(1,-1)$ sodass ein Objekt reibungsfrei in minimaler Zeit den Punkt $(1,-1)$ erreicht

Beispiel:

Lagrange Zugung in der Mechanik

$L = T - V$ T : Kinet. Energie
 M : potent. "

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = Q_i^*$$

C) Optimale Regelung

$$\min_{u(\cdot)} J(u, x_0) = \int_0^1 F(x(t), u(t)) dt$$

s.t. $\dot{x} = f(x(t), u(t)) \rightarrow$ zusätzliche dyn. NB
 $x(0) = x_0$

- Drei Varianten:
- $u(t)$ Optimalsteuerung
 - $u = Kx$ Optimale Regelung
 - MPC

2. Reglerentwurf durch Minimierung eines quadr. Gütekriteriums (LQR)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B \cdot u(t) \quad (1) \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^q$$

Anfangsbed. $x(0) = x_0$

Gesucht: $u(t) = K \cdot x(t) \quad (2) \quad \text{Linearer Zustandsregler}$

$$J(x_0, u) = \int_0^{\infty} x(\tau)^T Q x(\tau) + u(\tau)^T R \cdot u(\tau) d(\tau) \quad (3)$$

Annahme: $Q = Q^T \geq 0, R = R^T > 0$

- Kompromiss zwischen schnellem Einschwingen ($x^T Q x$), kleine Stellenergie ($u^T R u$)
- „positive“ und „negative“ Abweichungen werden gleich bestraft.
- Q „nur“ pos semi-definit, da evtl. einzelne Zustände nicht wichtig sind.
- R pos. definit zur Vermeidung, dass Komponenten von u „ungestraft“ gegen ∞ gehen.
- Wahl von Q und R Designaufgabe:
 - oft diagonal
 - wichtig Skalierung

Exkurs: Stabilisierbarkeit + Entdeckbarkeit

Def: (A, B) stabilisierbar, wenn es ein $u(t)$ gibt, dass das System in den Ursprung überführt.
(alle instabilen Moden sind steuerbar)

Steuerbarkeit $\Rightarrow$ Stabilisierbarkeit

Hautus-Test: $\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I - A & B \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \sigma^+(A)$

(A, B) stabilisierbar ist wichtige Voraussetzung für Reglerentwurf.

Def: (A, C) entdeckbar, falls alle instabilen Moden beobachtbar.

Hautus-Test: $\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \sigma^+(A)$

Dualität:

$$A, B, C, D : \underbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}}_{\Sigma_D} \xleftrightarrow{\text{dual}} \underbrace{\begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}}_{\Sigma_D}$$

$$\Sigma \text{ steuerbar} \Leftrightarrow \Sigma_D \text{ beobachtbar}$$

Beispiel:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} x$$

instabile Mode: $\lambda_1 = 1$

stabile Mode: $\lambda_2 = -2$

Stabilisierbarkeit: $\text{rang}[\lambda_1 I - A : B] = \text{rang} \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 3 & b_2 \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} n$
 $b_1 \neq 0 \Leftrightarrow (A, B) \text{ stabilisierbar}$

Entdeckbarkeit: $\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda_1 I - A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} n$
 $c_1 \neq 0 \Leftrightarrow (A, C) \text{ entdeckbar}$

Steuerbarkeit: $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$

} mit Kalman-Test überprüfbar

Beobachtbarkeit: $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$

Beispiel:

Doppel-Integrator

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \begin{array}{l} x_1: \text{Position} \\ x_2: \text{Geschw.} \end{array}$$

$$J = \int_0^{\infty} x^T \underbrace{\begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix}}_{\text{a diagonal}} x + r u^2 dt$$

- $r > 0$

- $Q \succeq 0 \Leftrightarrow q_1 \geq 0, q_2 \geq 0$

... $Q = 0 \Rightarrow$ geschlossener Regelkreis instabil, da $u_{\text{opt}} = 0$

... $\begin{matrix} q_1 \geq 0 \\ q_2 \geq 0 \end{matrix} \Rightarrow$ wir fordern, dass Position $\rightarrow 0$

$\hookrightarrow$ Geschw. $\rightarrow 0$

$\Rightarrow$ sinnvolle Wahl, obwohl $Q \text{ „nur“ } \succeq 0$

... $\begin{matrix} q_1 > 0 \\ q_2 > 0 \end{matrix} \Rightarrow$ wir fordern Geschw. $\rightarrow 0$, Position egal

Allgemein: $Q = Q^T \succeq 0 \Rightarrow Q = M^T M$ (nicht eindeutig)

$$x^T Q x = \underbrace{x^T M^T}_{\tilde{y}^T} \underbrace{M x}_{\tilde{y}} = \tilde{y}^T \tilde{y} \quad \text{für } \tilde{y} = Mx \text{ virtueller Ausgang}$$

Durch Wahl von Q fordern wir $\tilde{y} \rightarrow 0$

Für Stabilität: Wann gilt $\tilde{y} \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow 0$?

Antwort: Genau wenn (A, M) entdeckbar.

$$\begin{aligned} Q > 0 &\Rightarrow M > 0 \Rightarrow (A, M) \text{ entdeckbar} \\ \text{rang} \begin{bmatrix} I \\ M \end{bmatrix} &= n \\ \text{rang}(M) &= n \end{aligned}$$

$\exists M: M^T M = Q$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad \text{Gesucht: } u = Kx$$

$$J(x_0, u) = \int_0^\infty x^T Q x + u^T R u \, dt$$

Satz: Sei $Q = Q^T \geq 0$ ($\Rightarrow Q = M^T M$), $R = R^T > 0$, (A, B) stabilisierbar, (A, M) entdeckbar

Das optimale Rückführungsgesetz lautet: $u = -\underbrace{R^{-1}B^T P}_{u} x$
 wobei P die eindeutige pos. semidefinite Lsg. der u
 algebraischen Riccati-Gleichung $PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$ (ARE)
 ist, und der geschlossene Kreis ist asy. stabil.

Die optimalen Kosten $J_{\text{opt}}(x_0) = J^*(x_0) = \min_u J(x_0, u) = x_0^T P x_0$

- Bemerkungen:
- Die optimale Lösung ist linear
 - Die Stabilität ist unabhängig von Q, R
 - ARE ist quadratisch in $P \rightarrow$ mehrere Lsg. möglich, aber mit den Annahmen ist nur eine pos. Semidef.
 - Herleitung von ARE via Variationsrechnung oder dynamische Programmierung (Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung)
 - Riccati-Gly wichtig in KRT. z.B. H ∞ -Regler, Kalman-Filter
 - $Q > 0 \Rightarrow (A, M)$ entdeckbar

Beweis: Stabilität (mit Lyapunov)

Idee: Optimale Kost ist Lyapunov Funktion: $V(x) = x^T P x$ V pos. semidef

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = (x^T A^T + u^T B^T) P x + x^T P (Ax + Bu) \\ &\stackrel{u=Kx}{=} x^T (A^T P + PA - 2PB R^{-1} B^T P) x \end{aligned}$$

(ARE: $A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P$)

$$\dot{V} = -x^T \underbrace{(Q + PBR^{-1}B^T P)}_{\geq 0} x \leq 0$$

$$\begin{aligned} V &\geq 0 \quad (\text{beschränkt}) \Rightarrow V \text{ konvergiert} \Rightarrow \dot{V} \rightarrow 0 \quad (*) \\ V &\leq 0 \quad (V \text{ monoton}) \end{aligned}$$

$$(*) \Rightarrow x^T Q x \rightarrow 0 \Rightarrow x^T M^T M x \rightarrow 0 \Rightarrow \tilde{y} \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow 0$$

Beweis : Optimalität

Vorausgesetzt P ist Lsg der ARE, $x, u \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} x^T Q x + u^T R u \, dt - \int_0^{\infty} x^T \underbrace{(PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P)}_{ARE=0} x \, dt \\ &\quad - \int_0^{\infty} u^T B^T P x + x^T P B u \, dt + \int_0^{\infty} u^T B^T P x + x^T P B u \, dt \\ &= \int_0^{\infty} [Ax + Bu]^T P x + x^T P (Ax + Bu) \, dt + \int_0^{\infty} u^T R u + u^T B^T P x + x^T P B u + x^T P B R^{-1} B^T P x \, dt \\ &= - \int_0^{\infty} \dot{V} \, dt \quad \text{für } V = x^T P x \\ &= V(0) - V(\infty) = V(0) = x_0^T P x_0 \end{aligned}$$

$$\textcircled{u} = \int_0^{\infty} [u + R^{-1} B^T P x]^T R [\%] \, dt \rightarrow \min \text{ für } [\%] = 0 \Rightarrow u = -R^{-1} B^T P x$$

Bewiesen: $u = -R^{-1} B^T P x$ optimal
 $J_{\text{opt}}(x_0) = x_0^T P x_0$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0$$

$$J(x, u) = \int_0^{\infty} x^T Q x + u^T R u \, dt$$

$$\text{i) } Q = Q^T \geq 0$$

$$\text{ii) } R = R^T \geq 0$$

iii) (A, B) stabilisierbar

iv) (A, M) entdeckbar

$\left. \begin{array}{l} \text{Hantus-} \\ \text{Test} \end{array} \right\}$

$$M^T M = Q$$

$$u_{\text{opt}} = -R^{-1} B^T P x$$

$$(ARE) \quad \underbrace{PA + A^T P + Q}_{\text{LTPK}} - \underbrace{PBR^{-1}B^T P}_{\text{LTPK}} = 0$$

$$J_{\text{opt}} = x_0^T P x_0$$

Bewiesen: Stabilität, Optimalität

Beispiel: Skalarer Fall

$$\dot{x} = ax + bu$$
$$J = \int_0^{\infty} q x^2 + r u^2 dt \quad a, b, q, r \in \mathbb{R}$$

(A, B) stabilisierbar : $b \neq 0$ oder $a < 0$

Was bedeutet es, wenn (A, B) nicht stabilisierbar ist?

$b=0, a \geq 0 \Rightarrow$ instabiles bzw. nicht asymp. stabiles System ($a=0$)
ohne Eingang

$$\text{ARE: } 2pa + q = 0 \rightarrow p = \frac{-q}{2a} < 0$$

(A, M) entdeckbar : $q \neq 0$ oder $a < 0$

Was bedeutet es, wenn (A, M) nicht entdeckbar ist?

$q=0 \Rightarrow$ Für $q=0$ ist die optimale Lösung $u_{\text{opt}} \equiv 0$, da die Zustände nicht bestraft werden.

$\Rightarrow$ Für $a < 0$ asymp. stabil, $a \geq 0$ nicht asymp. stabil

$$\text{ARE: } 2a \cdot p - p^2 b^2 r^{-1} = 0 \rightarrow 2 \text{ Lösungen: } \begin{matrix} p_1 = 0 \\ p_2 = \frac{2ar}{b^2} \end{matrix}$$

Für $a < 0$ ist $p_2 < 0 \Rightarrow p_1$ eindeutige pos. sem. def. Lösung der ARE.

Für $a > 0$ ist $p_2 > 0 \Rightarrow$ Lösung nicht eindeutig. System instabil, obwohl pos. def. Lösung der ARE existiert.

Beispiel: Doppel-Integrator

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad \text{instabil, steuerbar}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = 1$$

$$\text{mit } J = \int_0^{\infty} x^T x + u^2 dt \quad \leadsto \text{Bed i) - iv) erfüllt.}$$

$$\text{Ansatz: } P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \quad \text{Symmetrisch}$$

$$\text{ARE: } PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ * & p_{22} \end{bmatrix}}_P \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_A + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ * & p_{22} \end{bmatrix}}_P + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_Q - \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ * & p_{22} \end{bmatrix}}_P \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\frac{1}{1}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{B^T} \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ * & p_{22} \end{bmatrix}}_P \stackrel{!}{=} 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & p_{12} \\ p_{12} & 2p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{12}^2 & p_{12}p_{22} \\ p_{12}p_{22} & p_{22}^2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 - p_{12}^2 & p_{12} - p_{12}p_{22} \\ p_{12} - p_{12}p_{22} & 2p_{22} + 1 - p_{22}^2 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

$$A=0 \Rightarrow p_{12}^2 = 1 \Rightarrow p_{12} = \pm 1$$

$$\text{Fall } p_{12} = -1 \stackrel{C=0}{\Rightarrow} p_{22}^2 = -1 \quad \nexists$$

$$\text{Fall } p_{12} = 1 \stackrel{C=0}{\Rightarrow} p_{22}^2 = 3$$

$$\text{Fall } p_{22} = \sqrt{3} \stackrel{B=0}{\Rightarrow} p_{11} = \sqrt{3}$$

$$\text{Fall } p_{22} = -\sqrt{3} \stackrel{B=0}{\Rightarrow} p_{11} = -\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2 \text{ Lösungen: } P_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \\ P_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \nexists \text{ nicht } \geq 0$$

P_1 ist die eindeutige pos. semi. def.-Lösung von ARE

$$P = P^T$$

$$\lambda(P) \geq 0 \Leftrightarrow P \geq 0$$

EW von P

Optimales Rückführungsgesetz

$$u = -R^{-1} B^T P x \\ = -1 \cdot 10 \cdot 1 \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} x \\ = -10 \sqrt{3} x$$

Stabilität geschlossener Kreis

$$\dot{x} = A x + B u_{\text{opt}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}}_{A_{\text{cl}}} x \Rightarrow \forall \lambda \in B$$

$$\text{oder Lyapunov: } V = x^T P x > 0 \\ \dot{V} = x^T (P A_{\text{cl}} + A_{\text{cl}}^T P) x = x^T \begin{bmatrix} -2 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -4 \end{bmatrix} x < 0 \\ \Rightarrow \text{asympt. stabil}$$

Zeitvariante Systeme und/oder endlicher Horizont

$$\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t) + B(t) \cdot u(t)$$

$$J(x_0, u) = \int_0^{t_f} x^T(\tau) Q x(\tau) + u^T(\tau) R u(\tau) d\tau$$

Aus ARE wird Riccati-DGL:

$$\dot{P}(t) = -P(t) A(t) - A^T(t) P(t) - Q + P(t) B(t) R^{-1} B^T(t) P(t)$$

$$P(t_f) = 0 \quad (\text{Endbedingung})$$

Endzeit des Gütefunktional

$$u_{\text{opt}} = - \underbrace{R^{-1}B^T(t) \cdot P(t)}_{x(t)} \cdot x(t)$$

Bemerkung: Lösung der R-DGL konvergiert gegen die Lösung der ARE für $t_f \rightarrow \infty$ für $A, B = \text{Konst.}$

→ Eine Lösungsmethode für ARE

R-DGL rückwärts in Zeit lösen

Regelgesetz linear in x , aber zeitvariant.

$$\text{Optimale Kost } J_{\text{opt}} = x_0^T \cdot P(0) \cdot x_0$$

3. Eigenschaften des LQR

i) garantierte Stabilität

ii) Optimalität

iii) Robustheit $A_R = (\frac{1}{2}, \infty)$, $\varphi_R = \pm 60^\circ$

→ Interpretation im Frequenzbereich (siehe Handout)

Beweis: $A_R = (\frac{1}{2}, \infty)$ im Zeitbereich
 $\dot{x} = Ax + d \cdot B \cdot u$ d : unbekannt

(LQR für $d = 1$ (nominell)) $\Rightarrow$ Für welche d ist Stabilität garantiert?

Lyapunov: $V = x^T P x$

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = (Ax + d \cdot B \cdot u)^T P x + x^T P (Ax + d \cdot B \cdot u)$$

$$\stackrel{u = -Kx}{=} x^T (A^T P + P A - 2 \cdot d \cdot P B R^{-1} B^T P) x$$

$$\stackrel{\text{ARE}}{=} x^T \underbrace{(-Q)}_{\geq 0} + \underbrace{(1-2d) P B R^{-1} B^T P}_{\geq 0} x$$

$\Rightarrow$ Falls $d \in [\frac{1}{2}, \infty)$ $\Rightarrow$ asymp. Stabilität garantiert

4. Optimales Tracking

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad x(0) = x_0$$

$$y = Cx$$

Führungsgröße $w(t)$, Fehler $e(t) = y(t) - w(t)$
 $J(x_0, u) = \int_0^{t_f} e(\tau)^T \hat{Q} e(\tau) + u(\tau)^T \hat{R} u(\tau) d\tau$

Annahme: $w(t)$ bekannt (muss vorher bekannt sein, um rückwärts in der Zeit zu integrieren)

$$u(t) = -\hat{R}^{-1} B^T P(t) x(t) + \hat{R}^{-1} B^T \xi(t)$$

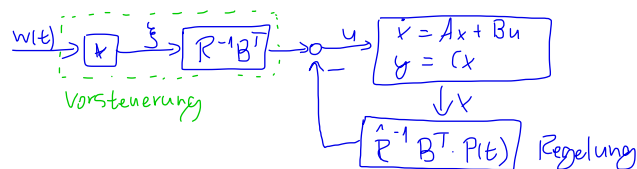
$$\dot{P}(t) = -P(t)A - A^T P(t) - C^T \hat{Q} C + P(t)B \hat{R}^{-1} B^T P(t)$$

$$\dot{\xi}(t) = (P(t)B \hat{R}^{-1} B^T - A^T) \xi(t) - C^T \hat{Q} w(t)$$

$$P(t_f) = 0$$

$$\xi(t_f) = 0$$

~ Bestimmung durch Integration rückwirkend in Zeit



Herleitungsskizze: (Keine vollst. Herleitung)

$$x_{n+1} = 1 \quad \text{neuer Zustand } \hat{x} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

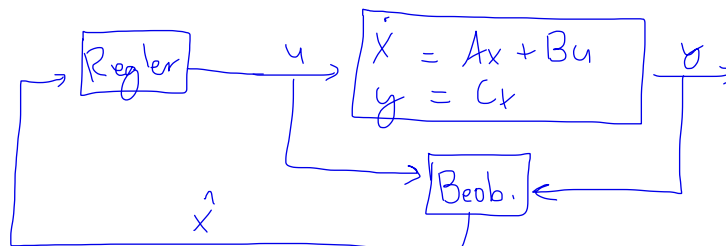
$$\tilde{x}^T \tilde{Q} \tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}^T \tilde{Q} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \triangleq (x-w)^T \hat{Q} (x-w)$$

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} C^T \hat{Q} C & -C^T \hat{Q} w(t) \\ \text{⊕} & w(t)^T \hat{Q} w(t) \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \int_0^{t_f} \tilde{x}^T \tilde{Q} \tilde{x} + u^T \hat{R} u d\tau \quad \Rightarrow \begin{matrix} \dot{\tilde{P}}(t) = \dots \\ \tilde{P}(t_f) = 0 \end{matrix}$$

⊕ Symmetrisch $\tilde{Q} = Q(t)$

5. Optimales Filterverfahren

5.1. Einschub: Lueneberg-Beobachter



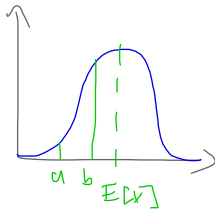
$$\dot{\hat{x}} = A \hat{x} + B u - L(C \hat{x} - y) \quad \text{Beobachterfehler } e = x - \hat{x} \Rightarrow \dot{e} = (A - LC)e$$

(A, C) beobachtbar $\Leftrightarrow$ Pole von $A - LC$ können bel. gewählt werden.

5.2. Stochastik

Zufallsvariable $x \in \mathbb{R}$

Wahrscheinlichkeitsdichte $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx$



Mittelwert / Erwartungswert

Kovarianz

Standardabweichung

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

$$V[x - E[x]]$$

$$\sigma = \sqrt{V[x - E[x]]}$$

5.3 Kalman-Bucy-Filter

$$\dot{x} = Ax + Bu + \underbrace{G \dot{w}_t}_{\text{Prozessrauschen}}$$

$$y = Cx + \underbrace{v_t}_{\text{Messrauschen}}$$

$\dot{w}_t, \dot{v}_t \dots$ Weißes Rauschen

w_t, v_t Wiener Prozesse

$$E[w_t w_t^T] = \hat{Q} \cdot t \quad \text{Intensität des Rauschens}$$

$$E[v_t v_t^T] = \hat{R}$$

$$\left. \begin{aligned} E[w_t] &= 0 \\ E[v_t] &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Mittelwertfrei}$$

$$E[w_t v_t] = 0 \quad \text{Messrauschen und Prozessrauschen unkorreliert}$$

$$\text{Annahme: } \hat{Q} \geq 0, \hat{R} > 0$$

Gesucht: Optimaler Filter

$$E[(x - \hat{x})^T (x - \hat{x})] \rightarrow \min$$

Quadratischer Beobachterfehler

Satz:

Sei $\hat{Q} \geq 0, R > 0, (A, C)$ entdeckbar, (A, B) stabilisierbar. Der stationäre Kalman-Bucy-Filter lautet: $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_F(y - C\hat{x})$ mit $K_F = \Sigma C^T \tilde{R}^{-1}$ und Σ ist die eindeutige symmetr. positiv-semidef. Lösung der algebr. Beobachter-Riccati-Glg. $A\Sigma + \Sigma A^T + G\hat{Q}G^T - \Sigma C^T \tilde{R}^{-1} C \Sigma = 0$

Die Beobachter-Fehlerdynamik ist asympt. stabil und quadr. Beobachterfehler sind minimal. $E[(x-\hat{x})^T(x-\hat{x})] \rightarrow \min$

Anmerkungen: Optimaler Kompromiss zwischen schnellen Zustandsschätzungen und Unempfindlichkeit gegenüber Störungen.

Erweiterungen: nichtlineare Systeme, Extended KF, LTV

- Linearer Fehler (Lueneberg-Struktur)
- Dualität ($A \leftrightarrow A^T$, $B \leftrightarrow C^T$)

5.4. LQG: Linear Quadratic Gaussian

$LQG = LQR + KBF$ ← Kalman-Bucy-Filter

- Separationsprinzip gilt weiterhin
- Optimalität (solange das Rauschen normalverteilt ist)
- Robustheit nicht garantiert.
 - ↳ Gegenbsp. von Doyle "There are none"
 - ↳ Einzelfall prüfen

III Eine Einführung in die Robuste Regelung

reales System $G_{\text{real}}(s)$
nominelles Syst. $G(s)$
↳ Analyse, Reglerentwurf

Beispiel: $m\ddot{x} = F$ -Freibung $m \in [100\text{t}, 250\text{t}]$
Freibung: Störung

Beispiel: Simulationsmodell
 $G_{\text{real}}(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \left(\frac{1}{0,1s+1}\right)^2$
Vereinfachtes Entwurfsmodell
 $G(s) = \frac{1}{s+1}$

⇒ Modellierungsfehler, Unsicherheiten Δ

Ansätze: Verschiedene Ansätze zur Robustheitsuntersuchung unterscheiden:
• Unsicherheitsmodellierung (parametrisch, unstrukturierte, probabilistische)
• garantierte, probabilistische Eigenschaften
• ...

Ansatz: 1) Unsicherheiten modellieren
Vorgriff: unstrukturierte Unsicherheit $G_{\text{real}}(s) = f(G(s), \Delta(s))$ mit
 Δs beschränkt. z.B. $|\Delta(j\omega)| \leq l(\omega) \quad \forall \omega$
2) Standardisierung des Problems
3) Satz um Stabilität zu garantieren

Def.: Robustheit
Eine Systemeigenschaft des geschl. Kreises heißt robust gegenüber bestimmten Modellunsicherheiten, wenn die Eigenschaft für alle Unsicherheiten erhalten bleibt.

Aufbau: 1) H_∞ -Norm
2) Beschreibung von unsicheren Systemen
3) Robuste Stabilität bei unstruktur. Unsich.
4) H_∞ -Reglerentwurf mittels Loopshaping
5) H_∞ -Reglersynthese

1. H_∞ - Norm

Maß für Größe vom dyn. System $\rightarrow$ Norm
Reglerentwurf mittels H_∞ führt zu MIMO-System

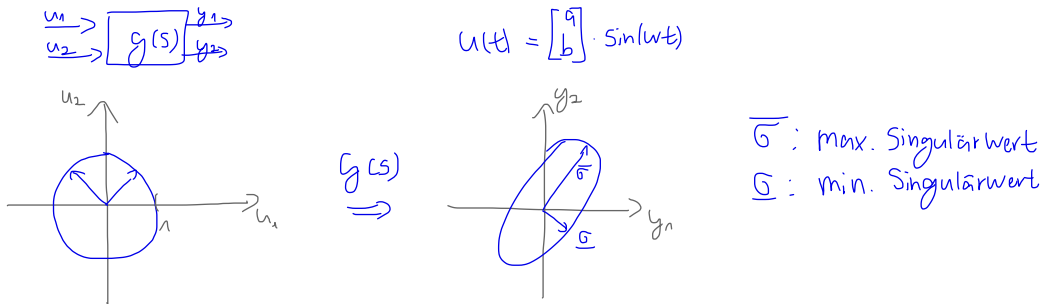
1.1. Singulärwertzerlegung

Motivation: SISO-System $G(s) \in \mathbb{C}$

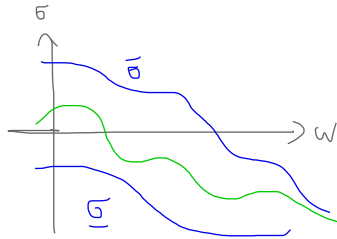
$$u(t) = 1 \cdot \sin(\omega t) \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow y(t) = A(\omega) \cdot \sin(\omega t + \delta(\omega))$$

char. Größen: $\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ Amplitude } A(\omega) \\ \bullet \text{ Phase } \delta(\omega) \end{array} \right\} \text{ Bodediagramm}$

MIMO-System: Bsp: $G(s) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$



Singulärwert diag.: Übertragungsmatrix $G(s) \in \mathbb{C}^{p \times q}$, $\omega \in [0, \infty)$



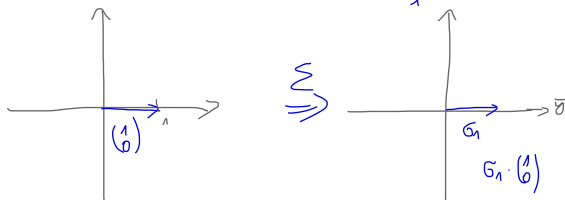
Verallg. v. Bodediagramm für MIMO

Singulärwertzerl.: $\underbrace{G(j\omega)}_A \in \mathbb{C}^{p \times q}$

Für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{p \times q}$ mit dem Rang r existieren unitäre Matrizen $U \in \mathbb{C}^{p \times p}$ und $V \in \mathbb{C}^{q \times q}$, so dass $A = U \cdot \Sigma \cdot V^*$ mit $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \sigma_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ mit Singulärwerten $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$

- Anmerkungen:
- $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitär $\Leftrightarrow M^{-1} = M^* \quad (MM^* = I)$
 - $\bar{\sigma} = \sigma_1, \quad \underline{\sigma} = \sigma_r$
 - $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(AA^*)} = \sqrt{\lambda_i(A^*A)} \quad i=1, \dots, r$
 - $U = [u_1 \dots u_r], \quad u_i$ Eigenvektoren von AA^*
 - $V = [v_1 \dots v_r], \quad v_i$ Eigenvektoren von A^*A

Interpretation: $y = Ax = U \Sigma V^* x$ mit $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$
 Betrachte $\bar{y} = U^* y = \underbrace{\Sigma}_{\frac{1}{x}} V^* x$

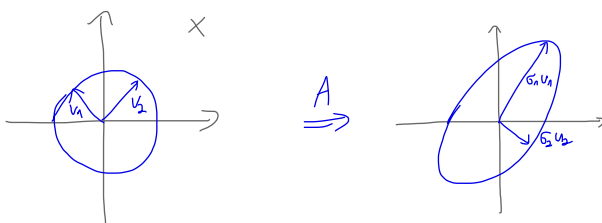


σ_1 : max. Verstärkung für $x = v_1 \quad v_1^* v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$

σ_r : min. Verstärkung für $x = v_r$

Keine Verstärkung für $x = v_i, \quad i=r+1, \dots, q$

Spalten von V sind die Eingangsrichtungen
 " U " Ausgangsrichtungen



$\bar{\sigma}(A)$: max. Verstärkung der Matrix A

Beispiel:

$$\sigma \left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \right) = \sqrt{\lambda_{\max}(a_1^2 + a_2^2)} = \sqrt{\lambda_{\max} \left(\begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 \\ a_1 a_2 & a_2^2 \end{bmatrix} \right)} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$\geq \max \{ |a_1|, |a_2| \}$$

Eigenschaften:

- $\bar{\sigma}(AB) \leq \bar{\sigma}(A) \cdot \bar{\sigma}(B)$
- $\max \{ \bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B) \} \leq \bar{\sigma} \left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \right) = \sqrt{2} \cdot \max \{ \bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B) \}$
- $\bar{\sigma} \left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \right) \leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B)$
- $\bar{\sigma} \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \right) = \max \{ \bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B) \}$
- $|\bar{\sigma}(A) - \bar{\sigma}(B)| \leq \bar{\sigma}(A+B) \leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B)$

$$U, V \text{ unitär: } \overline{\sigma}(UAV) = \overline{\sigma}(A)$$

1.2. Vektor- und Matrixnormen

$$\text{Vektornorm für } x \in \mathbb{C}^n, p\text{-norm } p \in [1, \infty): \|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_i |x_i|^p}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \sum_i |x_i| \\ \|x\|_2 &= \sqrt{\sum_i |x_i|^2} \stackrel{\mathbb{R}}{=} \sqrt{x^T x} \\ \|x\|_\infty &= \max_i |x_i| \end{aligned}$$

Matrixnorm: Ind. Normen für $A \in \mathbb{C}^{p \times q}$

$$\|A\|_{p\text{-ind}} = \sup_{0 < \|x\|_p < \infty} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

- Max. Verstärkung in p-Norm
- $\|AB\|_{p\text{-ind}} \leq \|A\|_{p\text{-ind}} \cdot \|B\|_{p\text{-ind}}$ (Submultiplikativität)

$$\|A\|_{2\text{-ind}} = \dots = \overline{\sigma}(A)$$

1.3. Signal- und Systemnorm

$$u \rightarrow \boxed{g} \rightarrow y$$

Signalnormen $y: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^p$

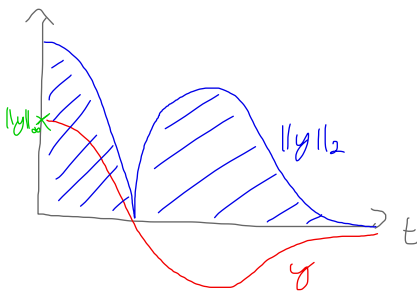
L_p -Norm $p \in [1, \infty)$

$$\|y\|_p = \sqrt[p]{\int_0^\infty \sum_i |y_i|^p dt}$$

L_2 -Norm $\|y\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty y(t)^T y(t) dt}$

L_∞ -Norm $\|y\|_\infty = \sup_t \max_i |y_i(t)|$

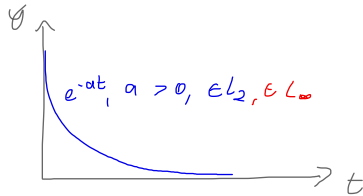
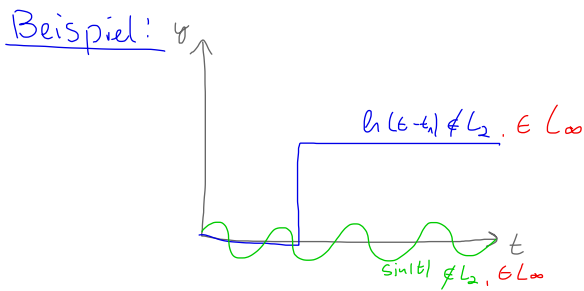
Beispiel:



$$\|y\|_2 \text{ endlich} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t)\| = 0$$

$$\|y\|_\infty \text{ endlich} \Leftrightarrow y \text{ beschränkt}$$

L_p -Raum: Vektorraum aller Signale mit endlicher L_p -Norm ($p \in [1, \infty)$)



$$\|y\|_2^2 = \int_0^\infty |y(t)|^2 dt = \int_0^\infty e^{-2at} dt = \left[-\frac{1}{2a} e^{-2at} \right]_0^\infty = \frac{1}{2a} < \infty$$

$$y(t) = e^{-at}, a < 0, y \notin L_2, y \notin L_\infty$$

Systemnormen $u \rightarrow [G] \rightarrow y$

Definition: $\|G\|_{p\text{-ind}} := \sup_{u \neq 0, \|u\|_p < \infty} \frac{\|y\|_p}{\|u\|_p}$

ist größtmögl. Verst. von Eingang auf Ausgang (L_p -Norm)

Definition: H_∞ -Norm

$$\|G\|_\infty := \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(G(j\omega))$$

Bedeutung H_∞ -Norm

- „Spitze“ in Singularwertdiagramm
- Max. Verst. der Amplitude eines bel. harmonischen Eingangssignals mit bel. Richtung.

Satz:

$$\|G\|_{2\text{-ind}} = \|G\|_\infty$$

H_∞ -Norm = L_2 -Verst. für lineare zeitinv. (LTI) Systeme

Beweis:

$$\begin{aligned} \text{i) } \|G\|_\infty \text{ ist obere Schranke } \|y\|_2^2 &= \int_0^\infty y(t)^T y(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \|y(j\omega)\|_2^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \|G(j\omega)u(j\omega)\|_2^2 d\omega \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \|G(j\omega)\|_2^2 \cdot \|u(j\omega)\|_2^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \underbrace{\bar{\sigma}(G(j\omega)) \cdot \bar{\sigma}(G(j\omega))^T}_{\leq \sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega))^2} \|u(j\omega)\|_2^2 d\omega \\ &= \sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega))^2 \cdot \|u\|_2^2 \\ \Rightarrow \|G\|_{2\text{-ind}} &= \sup_{u \neq 0, \|u\|_2 < \infty} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2} \leq \sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega)) = \|G\|_\infty \end{aligned}$$

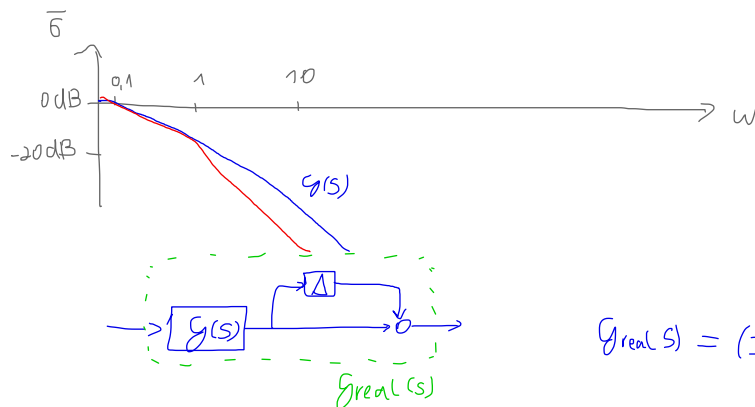
- ii) $\|g\|_\infty$ ist kleinste obere Schranke
Konstruiere worst-case $u \in L_2$ (Zhou, Essential of robust contr., 1998)

H_∞ -Raum: Vektorraum aller Matrixfkt. mit endl. H -Norm und analytisch in offenen rechten Halbebene (RHP)

2. Beschreibung von unsicheren Systemen

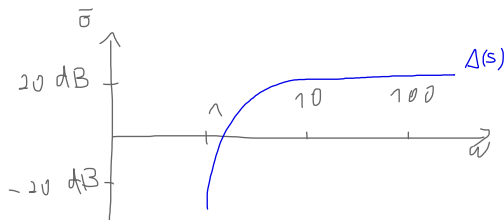
2.1. Unstrukturierte Unsicherheitsbeschreibungen

Beispiel:
$$g_{\text{real}}(s) = \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{:=g(s)} \cdot \underbrace{\frac{1}{(0,1s+1)^2}}_{\text{vernachlässigt/ unbekannt}}$$



$$g_{\text{real}}(s) = (I + \Delta(s)) g(s)$$

Wir wissen:
$$\Delta s = (g_{\text{real}}(s) - g(s)) g^{-1}(s) = - \frac{s(0,1s + 0,2)}{(0,1s + 1)^2}$$



$$\Rightarrow \|\Delta\|_\infty \leq 10$$

- Konservativ:
- Für kleine Freq. ist Fehler klein:
 $\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) < \varrho(\omega) \quad \forall \omega \text{ für } \varrho(\omega): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$
 - Ein reales System, aber Menge betrachteten Systemen $(I + \Delta(s)) g(s)$

Typische unstrukturierte Unsicherheitsbeschr.

- Unsicher $\Delta(s)$: Unbekanntes LTI System, beschränkt ($\overline{\sigma}(\Delta(j\omega)) < \rho(\omega) \forall \omega$)
- ↳ stabil
 - ↳ bel. Anzahl Polstellen und NS
 - ↳ bel. Struktur

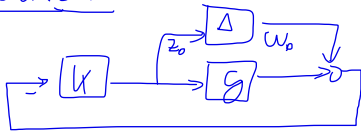
Nicht behandeln:

- strukturierte Unsicherheiten, z.B. $\Delta(s) = \begin{pmatrix} \Delta_1(s) & 0 \\ 0 & \Delta_2(s) \end{pmatrix}$
- parametrische " z.B. $\Delta(s) = a \in \mathbb{R}, \quad a \in [0, 1]$

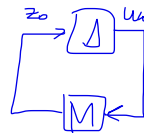
Strukturen: $\leadsto$ Blatt

22. M- Δ -Struktur

Beispiel:



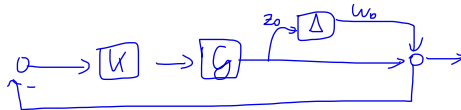
$\Rightarrow$



$$\begin{aligned} z_0 &= -k(u_0 + g \cdot z_0) \\ &= -(I + gk)^{-1} \cdot k \cdot u_0 \\ M &= -(I + gk^{-1}) K \end{aligned}$$

- Allg. Vorgehen:
- 1) Struktur zeichnen
 - 2) Ein- (z_0) und Ausgänge (w_0) der Unsicherheit beschr.
 - 3) Übertragungsmatrix von w nach z ermitteln

Beispiel: mult. Ausgangsunsicherheit



$$z_0 = -gk \cdot (I + gk)^{-1} w_0 = -T \quad \text{Kmpl. Sensitivität}$$

Normierung: Ziel: $\|\Delta\|_\infty < 1$

Beispiel: Zhou - Essentials of Robust Control

$$G_{\text{real}}(s) = \frac{k \cdot e^{-Ts}}{Ts + 1}$$

$$G(s) = \frac{6.5}{(2.5s + 1)(1.5s + 1)}$$

$$4 < k < 9$$

$$2 \leq T \leq 3$$

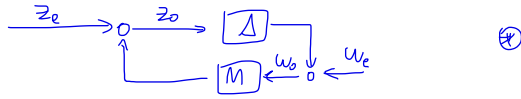
$$1 \leq T \leq 2$$

Additive Unsicherheit : $\Delta A(s) = G_{\text{real}}(s) - G(s)$

Multipl. Unsicherheit : $\Delta_M(s) = \frac{G_{\text{real}}(s) - G(s)}{G(s)}$

3. Robuste Stabilität bei unstr. Unsicherheiten

Betrachte $M - \Delta$ - Struktur



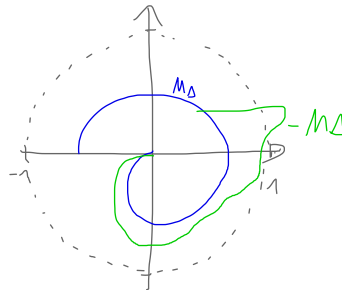
mit $\Delta \in \Sigma_\Delta := \{ \Delta \text{ proper und stabil mit } \|\Delta\|_\infty < 1 \}$

Satz:

Sei J und M proper und stabiles LTI-System. Dann ist der geschl. Kreis (*) intern stabil, wenn $\|M\Delta\|_\infty < 1$.

Beweis durch Nyquist-Kriterium für Mehrgrößensysteme.

Skizze SISO:



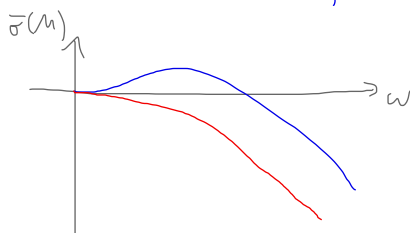
Bemerkung:

- Small-Gain-Theorem nur hinreichend
- gültig für alle induzierten Matrixnormen für die Bedingung : $\|M(j\omega) \cdot \Delta(j\omega)\| < 1$
- Erweiterung für nichtlin. Systeme: Notwendige Bedingung für $M - \Delta$ - Struktur : $\|M\Delta\|_\infty < 1 \quad \forall \Delta \in \Sigma_\Delta$
 $\Leftrightarrow \|M\|_\infty \cdot \underbrace{\|\Delta\|_\infty}_{< 1} < 1 \quad \forall \Delta \in \Sigma_\Delta$

$$\Leftrightarrow \|M\|_\infty \leq 1$$

d.h. wenn $\|M\|_\infty \leq 1 \Rightarrow$ robuste Stabilität von (*)

Betrachte $\bar{\sigma}(M(j\omega))$



$$\begin{aligned} \text{z.B. } M &= -T \\ \omega_\Delta &= I \end{aligned}$$

Ist $\|M\|_\infty \leq 1$ auch notwendig?

Satz: Robust Stability Theorem

Sei M ein proper und stabiles LTI-System und $\Delta \in \Sigma_\Delta = \{ \Delta \text{ proper und stabil mit } \|\Delta\|_\infty < 1 \}$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- i) Der geschl. Kreis (*) ist robust stabil
- ii) " " " (*) ist intern stabil für alle $\Delta \in \Sigma_\Delta$
- iii) $\bar{\sigma}(M(j\omega)) \leq 1 \quad \forall \omega$
- iv) $\|M\|_\infty \leq 1$

Bemerkung:

- Σ_Δ beinhaltet lineare Systeme beliebiger Dimensionen, zeitinvariante, ...
- Bedingung ist notwendig ($\|M\|_\infty \leq 1$)
- " " hinreichend ($\Rightarrow$ robuste stab.)

Beweis:

i) Notwendig folgt aus Small-Gain-Theorem

ii) Hinreichend für SISO-Fall.

Konstruiere ein $\Delta \in \Sigma_\Delta$, so dass (*) instabil. Wähle $\omega_0 \in \mathbb{R}$, so dass $|M(j\omega)| > 1$.

$$\text{Def. } \Delta_0 = \frac{1}{M(j\omega_0)} \in \mathbb{C} \Rightarrow |\Delta_0| < 1$$

$$\text{Def. } \Delta(s) = \alpha \cdot \frac{s - \beta}{s + \beta} \quad \text{mit } \alpha = \pm \Delta_0, \quad \beta = j\omega_0 \cdot \frac{\alpha - \Delta_0}{\alpha + \Delta_0}$$

Satz:

Δ ist proper, reell-rational und $\Delta(j\omega) = \Delta_0$

$$|\Delta(j\omega)| = |\Delta_0| \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

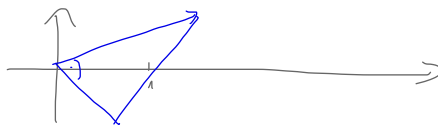
Δ stabil für $\alpha = +|\Delta_0|$ oder $-|\Delta_0|$

Beweis:

(Skizze)

$$\beta = j\omega_0 \frac{\pm 1 - e^{i\varphi}}{\pm 1 + e^{i\varphi}}$$

rein imaginär



$$\Rightarrow |\pm 1 - e^{i\varphi}| \perp (\pm 1 + e^{i\varphi}), \quad \beta \in \mathbb{R}$$

Für def. $\Delta(s)$ gilt: $1 - M(j\omega_0)\Delta(j\omega_0) = 0$

$$\Leftrightarrow 1 - M(j\omega)\Delta(j\omega) = 0 \quad \text{für ein } \omega$$

Nyquist-Ortskurve geht durch krit. Punkt $\Leftrightarrow$ geschl. Kreis instabil.

Normierung: Gegeben: $\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq \ell(\omega) \quad \forall \omega$
 Dann konstruiere stabiles, proper und minimalphasiges SISO-System.
 $W_\Delta(s) = W_\Delta(s) \cdot I$ mit $|W_\Delta(j\omega)| \geq \ell(\omega) \quad \forall \omega$

Ergebnis: $\mathcal{T}$ mit $\|\bar{\Delta}\|_\infty < 1$, $\bar{M} = W_\Delta M$

Rob-Stab.-Theorem anwenden auf mult. Ausgangsunsicherheit

Geg.: $M = -T$, $\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq \ell(\omega) \quad \forall \omega$

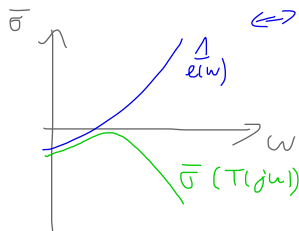
Normieren: $|W_\Delta(j\omega)| = \ell(\omega)$

d.h. für M und Δ wie in Rob.-Stab.-Theorem: Geschl. Kreis $\oplus$
 mit multipl. Ausgangsunsicherheit ist robust stabil.

$$\Leftrightarrow \bar{\sigma}(W_\Delta(j\omega) \cdot T(j\omega)) \leq 1 \quad \forall \omega$$

$$\stackrel{= \ell(\omega)}{\Leftrightarrow} \Leftrightarrow (\underbrace{|W_\Delta(j\omega)|}_{= \ell(\omega)}) \cdot \bar{\sigma}(T(j\omega)) \leq 1 \quad \forall \omega$$

$$\Leftrightarrow \bar{\sigma}(T(j\omega)) \leq \ell(\omega) \quad \forall \omega$$



- Bei mult. Einschwingvorgang $\bar{\sigma}(K_G(I + K_G)^{-1}) \leq \frac{1}{\ell_E(\omega)} \quad \forall \omega$
- Bei addit. Unsicherheiten $\bar{\sigma}(K_S) \leq \frac{1}{\ell_A(\omega)} \quad \forall \omega$

Vorgehensweise zur Untersuchung auf robuste Stabilität

- 1) Festlegen des Unsicherheitstyps (z.B. mult. Ausgangsuns.)
- 2) Bestimmen/Festlegen der Größe $\ell(\omega)$ der Unsicherheit Δ
- 3) M - Δ -Struktur aufstellen und M ermitteln
- 4) Normieren
- 5) Wenn $\bar{\sigma}(\bar{M}(j\omega)) \leq 1 \quad \forall \omega \Leftrightarrow$ robuste Stabilität

Beispiel:

$$G_{\text{real}}(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \left(\frac{1}{0,1s+1} \right)^2$$

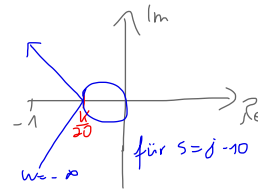
$$K(s) = \frac{30(s+1)}{s}$$

- Bisher:
- geschl. Kreis instabil
 - mult. Unsicherheit $\Delta(s)$

Jetzt: Reglerverstärkung k anpassen: $K(s) = k \cdot \frac{s+1}{s} \quad k \in \mathbb{R}$

a) ohne Unsicherheitsbeschreibung

$$L(s) = G_{\text{rech}}(s) \cdot K(s) = \frac{k}{s \cdot (0,1s+1)^2}$$



Nyquist -0k für $k=1$
 $\Rightarrow$ stabil f. $k \in (0, 20)$

b) Unstr. Unsicherheit

1) Unsicherheitstyp: mult. Ausgangsunsicherheit $G_\Delta(s) = G(s) (1 + \Delta(s))$

2) Größe der Unsicherheit: $\Delta_u(s) = \frac{5(0,1s+0,2)}{(0,1s+1)^2}$

$$\Rightarrow \Sigma_\Delta := \left\{ \Delta \text{ proper und stabile } \bar{C}\text{-Fkt} \mid \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq \ell_\Delta(\omega) \quad \forall \omega \right\}$$

mit $\ell_\Delta(\omega) \geq |\Delta_\Delta(j\omega)|$

3) M - Δ -Struktur: $\leadsto M = -T$

4) Normieren von Δ : Fnde $w_M(s)$ mit $|w_M(j\omega)| \geq \ell_\Delta(\omega) \quad \forall \omega$

DC-Verst.: 0,01, HF-Verst.: 1,5 ; $|w_M(11,6 \cdot j)| = 5,75$

$$\Rightarrow w_M(s) = \frac{15s + 0,237}{s + 27,47} \quad \Rightarrow \bar{M} = -w_M \cdot T$$

5) Kriterium für robuste Stabilität: $\bar{\sigma}(\bar{M}(j\omega)) \leq 1 \quad \forall \omega$

$$\text{oder } \bar{\sigma}(T(j\omega)) \leq \frac{1}{|w_M(j\omega)|} \quad \forall \omega$$

$M = -\frac{k}{s+k}$, proper und stabil für $k > 0$

Matlab: robuste Stabilität ist gewährleistet für $0 < k < k_{\max} \approx 1,9$

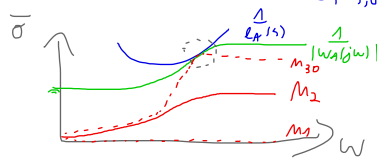
1) Unsicherheitstyp: Add. Unsicherheit $G_\Delta(s) = G(s) + \Delta(s)$

$$2) \Delta_A(s) = \frac{1}{s+1} \left(\frac{1}{(0,1s+1)^2} - 1 \right) = \frac{-0,01s(5+20)}{(s+1)(0,1s+1)^2}$$



3) M_Δ -Struktur: $M_k = -k \cdot S$

$$4) \text{ Normieren: } w_A(s) = \frac{0,035 + 1,154s}{s + 3,848}$$



5) Kriterien für robuste Stabilität

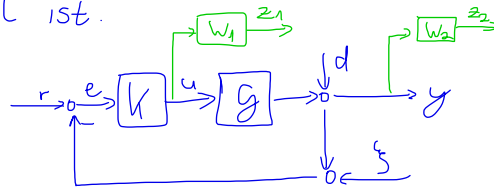
$$\bar{\sigma}(k(j\omega) \cdot S(j\omega)) \leq \frac{1}{|w_A(j\omega)|} \quad \forall \omega$$

$$M = \frac{k \cdot (s+1)}{s+k} \quad \text{stabil f. } k > 0$$

Matlab: Robuste Stabilität f. $0 < k < k_{\max} \approx 19,9$

III. 4. H_∞ - Reglerentwurf mittels Loopshaping

Idee: Entwurf eines Reglers, so dass H_∞ - Verstärkung von $w \rightarrow z$ minimal ist.



Ausgang:
$$y = d + G \cdot K \cdot (r - y) = (I + GK)^{-1} (d + GK r)$$

$$= S \cdot d + T \cdot r$$

Fehler:
$$e = r - y = r - Sd - Tr$$

$$= S(r - d)$$

Stellgröße:
$$u = K \cdot e = K \cdot S(r - d)$$

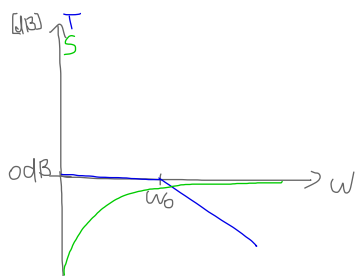
$$S = (I + GK)^{-1}$$
 Sensitivität (hinsichtlich von Störungen)

$$T = (I + GK)^{-1} \cdot G \cdot K$$
 Komplementäre Sensitivität (Ü-Fkt. des geschl. Kreises)

$$S + T = 1$$
 Fundamentaldilemma

4.1. Analyse des geschlossenen Kreises

- Wunsch/ziel:
- T klein f. hohe Freq.
 - S klein f. niedrige Freq.
 - Keine Peaks in $K \cdot S$ (Wg-Stellgrößenbeschränkung)



- Rauschunterdrückung
- Robustheit geg. multipl. Ausgangsunsicherheiten
- Regelgüte

Betrachte einzelne Übertragungskanäle:

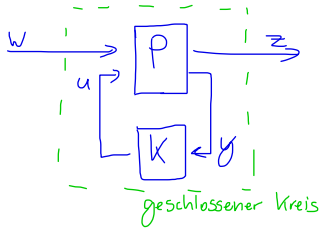
- $d \rightarrow y$ Regelgüte
- $r \rightarrow u$ Stellenergie / Robustheit gegenüber addit. Unsicherheiten

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \|d \rightarrow z_2\|_{\infty} < 1 \\ \|r \rightarrow z_1\|_{\infty} < 1 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{mit } w_1, w_2 \\ \text{inverses Wunschverhalten} \end{array}$$

$$\Rightarrow \|S\|_{\infty} < \|W_2\|^{-1}$$

→ eine allgemeingültige Entwurfsmethodik

4.2. Verallgemeinerte Strecke (Generalized plant, standard problem)



- W : externe Signale (r, d)
- Z : performance - Ausgänge
- u : Stellgröße
- y : Reglerausgang

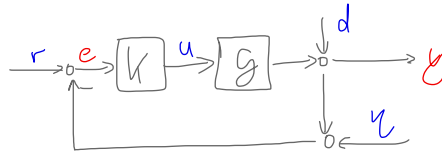
- Eine Struktur, die alle möglichen Strukturen repräsentiert
- Untersuchung Stabilität, Regelgüte an dieser Struktur

Transformationen:

- 1) Alle Performance-Signale $\leadsto z$: Markieren mit einer Farbe
- 2) Alle externen Signale $\leadsto w$: " " "Farbe
- 3) Alle Signale in den Regler $\leadsto y$: " " "Farbe
- 4) Alle Signale, die aus dem Regler herauskommen $\leadsto u$: " " "Farbe

Starten bei rot, gehe rückwärts bis blau.

$$\begin{bmatrix} Z \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} W \\ y \end{bmatrix}$$



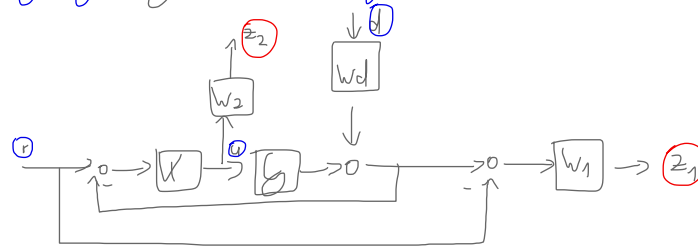
$$z = d + g \cdot y$$

$$y = r - (\tilde{r}_V + z) = r - \gamma - d = G \cdot u$$

$$\begin{bmatrix} z \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ I & -I & -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ v \\ w \\ u \end{bmatrix}$$

Beispiel:

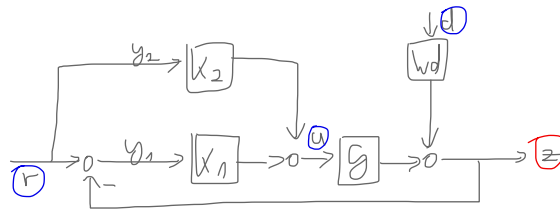
Folgerregelung und Stellgröße



$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -W_1 & W_1 W_d & W_1 G \\ 0 & 0 & W_2 \\ I & -W_d & -G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \\ u \end{bmatrix}$$

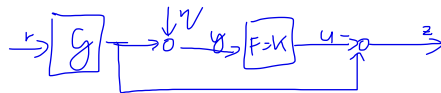
Beispiel:

2-Freiheitsgrade-Struktur



$$\begin{bmatrix} z_1 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & W_d & G \\ I & -W_d & -G \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \\ u \end{bmatrix}$$

Filter:



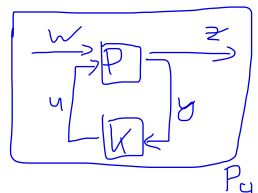
$$\begin{aligned} z &= -u + G \cdot r \\ y &= v + G \cdot r \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & 0 & -I \\ G & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ v \\ u \end{bmatrix}$$

→ Wir können jede Struktur in PK-Struktur umwandeln
 ⇒ ab jetzt nur noch PK-Struktur.

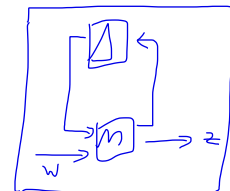
Zusammenhang zw. P und P_{CL}:

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

$$u = K y$$



=



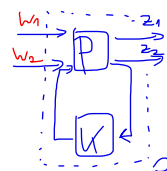
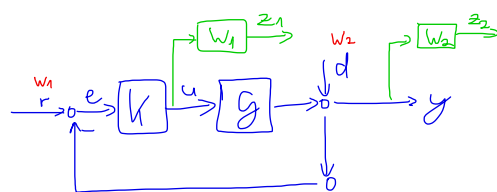
$$Z(s) = P_{CL}(s) \cdot W(s)$$

$$P_{CL} = P_{11} + P_{12} \cdot (I - K \cdot P_{22})^{-1} \cdot K \cdot P_{21}$$

$$= P_{11} + P_{12} K (I - P_{22} K)^{-1} \cdot P_{21} \quad (\leftarrow \text{Push-through-rule})$$

$$= F_L(P, K) \quad (\text{lower fraction transformation/representation LFT/LFR})$$

4.3. H_∞ -Reglersynthese



$$P_{cl} = \mathcal{F}_e(P, K)$$

$$= \begin{bmatrix} P_{cl}(1,1) & P_{cl}(1,2) \\ P_{cl}(2,1) & P_{cl}(2,2) \end{bmatrix}$$

$$z = P_{cl} \cdot w$$

Eigentlich interessiert uns $\|w_i \rightarrow z_i\|_\infty$, aber mit Verallg. Strecke bekommen wir $\|w \rightarrow z\|_\infty$

Beispiel:
$$\mathcal{F}_e(P, K) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+0.25} \\ \frac{2}{s+0.5} & \frac{0.1}{s+0.2} \end{bmatrix}$$

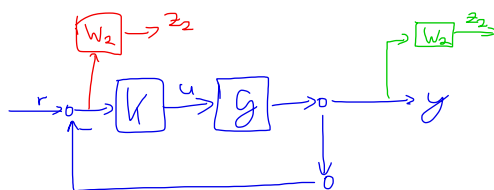
$$\|P_{cl}\|_\infty \approx 4.5$$

$$\|P_{cl}(1,1)\|_\infty = 0.5$$

$$\|P_{cl}(2,2)\|_\infty = 0.5$$

Trick: Umformulieren, so dass nur ein Eingang (oder Ausgang) auftaucht.

Beispiel:



$$\begin{bmatrix} w_2 s \\ w_1 K s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{cl}(1,1) \\ P_{cl}(2,2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Mixed Sensitivity

Problem

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 s \\ w_2 \cdot 1 \\ w_{Ks} \cdot K s \end{bmatrix}}_{P_a} r \quad \leadsto \quad \|P_{cl}\|_\infty \text{ minimal}$$

$$r = \min_K \|P_{cl}\|_\infty$$

$$\begin{bmatrix} W_S \cdot S \\ W_T \cdot T \\ W_{KS} \cdot KS \end{bmatrix} < 1 \quad \Rightarrow \quad \|W_S \cdot S\|_\infty < 1, \|W_T \cdot T\| < 1, \|W_{KS} \cdot KS\| < 1$$

Beispiel: SISO, dann ist P_{CL} Vektor $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ $\| \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2} < 1$
 „worst case“ $a = b = c \Rightarrow \sqrt{3|a|^2} < 1 \Rightarrow |a| < \frac{1}{\sqrt{3}}$

- $\Rightarrow$ d.h. • $\|P_{CL}\|_\infty < 1$ bedeutet, die Anforderungen sind erfüllt.
 • $\|P_{CL}\|_\infty > 0$ ist nicht unbedingt schlecht. K stabilisiert System, aber Anforderungen werden evtl. nicht erfüllt.

Gewichtsfunktion für H_∞-Reglerentwurf

Idee: $\|W_S \cdot S\| < 1 \Rightarrow |S| < |W_S|^{-1}$

$$W_S = \frac{\frac{s}{M} + \omega_0}{s + \omega_0 \cdot A}$$

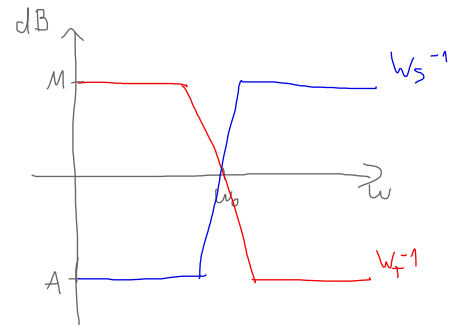
$$W_S^{-1} = \frac{s + \omega_0 \cdot A}{\frac{s}{M} + \omega_0}$$

$$W_{KS} = \text{const.} \quad (\text{oder Aktuatordyn.})$$

$$W_T = \frac{s + \frac{\omega_s}{M}}{As + \omega_0}$$

$$W_T^{-1} = \frac{As + \omega_0}{s + \frac{\omega_s}{M}}$$

$A \sim$ maximale bleib. Regelabweichung
 $M \sim$ Peak von Sensitivität auf Komp. Sens.
 $\omega_0 \sim$ erlaubte Bandbreite



- Bemerkungen:
- Reine Minimierung von $W_S \cdot S$ führt zu hoher Bandbreite des geschl. Kreises. (Aktuatordynamik!)
 $\rightarrow W_T \cdot T, W_{KS} \cdot KS$ zum Limitieren des Bands
 - gleichzeitiges Minimieren von $W_S \cdot S, W_T \cdot T, W_{KS} \cdot KS$ schwierig. (Fundamental dilemma)

$$r = \min \begin{bmatrix} W_S \cdot S \\ W_T \cdot T \\ W_{KS} \cdot KS \end{bmatrix}$$

- Das ist nicht das Problem, das wir ursprünglich lösen wollten ($\|W_1\| \rightarrow \text{zu } \infty \rightarrow \min$)

Ergebnisse immer mit Gewichtsfkt. vergleichen

Matlab:

- sysic
- hinf syn / hinf lmi
- lfe

III.5 H_∞ - Reglersynthese

5.1 Lineare Matrixungleichungen (LMI)

Definition: Eine symm. Matrix ($M = M^T$) heißt negativ definit, wenn $x^T M x < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus 0$

- neg.-semi-def. : $x^T M x \leq 0$
- pos. definit $x^T M x > 0$
- pos. semi-def. $x^T M x \geq 0$

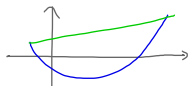
Falls $M < 0$, $\lambda_i(M) < 0 \quad i=1 \dots n$
 $x^T M x < 0$ (Skalar)
 $M < 0$ (Matrix)

Definition: Eine LMI ist eine Bedingung der Form $M_0 + x_1 M_1 + \dots + x_n M_n < 0$
mit M_i gegeben und $x = [x_1 \dots x_n]^T$ Vektor unbekannter Skalare.
LMIs sind konvex

Konvexe
Funktionen

$f: S \rightarrow \mathbb{R}$ ist konvex, falls

- S eine konvexe Menge ist
- $\forall x_1, x_2 \in S$ und $\alpha \in (0,1)$ $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha \cdot f(x_1) + (1-\alpha) \cdot f(x_2)$



LMI-Probleme: ① Lösbarkeitsprobleme
finde x , so dass $M(x) < 0$

② Minimierungsprobleme (mit linearer Zielfunktion) / Optimierungsprobleme
 $\min c^T x$
s.t. $M(x) < 0$ für geg. $c \in \mathbb{R}^n$

③ Verallgemeinertes EWP
 $\min \lambda$
s.t. $M(x) < \lambda \cdot N(x) \quad , M(x) > 0, \quad N(x) < 0$

- Rechenregeln:
- $M < 0 \Leftrightarrow -M > 0$
 - $M \leq 0 \Leftrightarrow -M \geq 0$
 - Falls N quadratisch und nichtsingulär, dann $M < 0 \Leftrightarrow N^T M N < 0$

(EW verändern sich $N^T M N$ keine Ähnlichkeitstraflo)

- $\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} < 0 \Rightarrow Q < 0, R < 0$
- $M < N \Rightarrow M - N < 0$

Schur Lemma: $Q = Q^T, R = R^T$

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} < 0 \Leftrightarrow R < 0 \text{ und } Q - S R^{-1} S^T < 0$$

$$\Leftrightarrow Q < 0 \text{ und } R - S^T Q^{-1} S < 0$$

Das Schur-Lemma ist das wichtigste Lemma, um Matrixungleichungen zu linearisieren.

Beweis: $X < 0 \Leftrightarrow N^T X N < 0$ (N voller Rang)

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R^T S & I \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} Q - S R^{-1} S^T & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}}_{< 0} \begin{bmatrix} I & 0 \\ R^{-1} S & I \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow R < 0 \text{ und } Q - S R^{-1} S^T < 0$$

Beispiel: Stabilität von linearen Systemen $\dot{x} = Ax$ (A stabil)

A stabil $\Leftrightarrow \exists X = X^T > 0 : A^T X + X A < 0$ (Lyapunov)

$$\begin{bmatrix} -X & 0 \\ 0 & A^T X + X A \end{bmatrix}$$

Beispiel: maximaler singulärer Wert

$$\bar{\sigma}(M) = \sqrt{\lambda_{\max}(M^T M)}$$

$$\bar{\sigma}(M) < r$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{\max}(M^T M) < r^2 \quad \text{Skalare Ungleichung}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{r^2 I - \underbrace{M^T}_{\underbrace{Q}} \underbrace{I}_{\underbrace{S^T}} \underbrace{M}_{\underbrace{R^{-1} S}}}_{\underbrace{S^T}} > 0 \quad \text{Matrixungleichung}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} r^2 I & M^T \\ M & I \end{bmatrix}$$

- für festes r : Lösbarkeitsproblem
- Minimiere r^2 so dass $\begin{bmatrix} r^2 I & m^T \\ m & I \end{bmatrix} \succ 0$: Optimierungsproblem

5.2. LMI-Charakterisierung der H_∞ -Norm (Bounded Real Lemma)

Satz:

Geg: ein lineares System

$$\dot{x} = Ax + Bw$$

$$z = Cx + Dw$$

$$g(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

- (1) A ist asymp. stabil und $\|g\|_\infty < r$
- (2) Es gibt ein $X = X^T > 0$, so dass

$$\begin{bmatrix} A^T X + X A & X B & C^T \\ B^T X & -r^2 I & D^T \\ C & D & -r^2 I \end{bmatrix} < 0$$

↳ Beweis:

- 1) $X > 0$ und $A^T X + X A < 0 \Leftrightarrow A$ stabil (Lyapunov)
(siehe (1,1)-Element)

- 2) " $\Rightarrow$ "

Schur-Lemma beim (3,3)-Element

$$\begin{bmatrix} A^T X + X A & X B \\ B^T X & -r^2 I \end{bmatrix} + \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} C^T C & C^T D \\ D^T C & D^T D \end{bmatrix} < 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} r(A^T X + X A) & r X B \\ r B^T X & -r^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^T C & C^T D \\ D^T C & D^T D \end{bmatrix} < 0$$

1. Substitution: $Y = r \cdot X$

2. Von Matrixungleichung zu skalarer Ungleichung: $M < 0 \Leftrightarrow x^T M x < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
 $x = [x^T w^T]^T$

$\Leftrightarrow$

$$H_\infty: \int_0^\infty z^T z dt < r^2 \int_0^\infty w^T w dt \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Y(A^T Y + Y A + C^T C) & Y B + C^T D \\ B^T Y + D^T C & D^T D - r^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} < 0$$

$$\Leftrightarrow x^T A^T Y x + x^T Y A x + \underline{x^T C^T C x} + \underline{x^T Y B w} + \underline{x^T C^T D w} + w^T B^T Y x + \underline{w^T D^T C x} + \underline{w^T D^T D w} - r^2 w^T w < 0$$

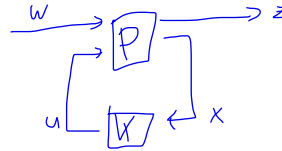
$$\Leftrightarrow \underline{z^T z} - r^2 w^T w + x^T Y \dot{x} + \dot{x}^T Y x < 0$$

Integration:

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^\infty \dot{x}^T \dot{x} dt}_{\|\dot{x}\|_2^2 = 0} + \underbrace{\int_0^\infty z^T z dt}_{\|z\|_2^2} - \gamma^2 \underbrace{\int_0^\infty w^T w dt}_{\|w\|_2^2} < 0$$

5.3 H_∞ - Optimale Zustandsrückführung

System: $\dot{x} = Ax + B_w \cdot w + B_u \cdot u$
 $z = Cx + D_w \cdot w + D_u \cdot u$



Regler: $u = Kx$, $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$

geschl. Kreis: P_{cl} : $\dot{x} = \underbrace{(A + B_u \cdot K)}_{\bar{A}} x + \underbrace{B_w}_{\bar{B}} \cdot w$
 $z = \underbrace{(C + D_u \cdot K)}_{\bar{C}} x + \underbrace{D_w}_{\bar{D}} \cdot w$

H_∞ - Regelungs-
problem:

- Suboptimaler Regler
Für ein geg. $\gamma > 0$, finde einen Regler K , so dass $\|P_{cl}\|_\infty < \gamma$ und stabil

- Optimaler Regler

Finde das Optimum des Optimierungsproblems $\gamma_{opt} := \inf_{K \text{ stabil}} \|P_{cl}\|_\infty$
 und einen stab. Regler K der das Opt. (fast) erreicht.

- $\bar{A}$ stabil und $\|P_{cl}(K)\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \exists X$, so dass

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (A+B_u K)^T X + X(A+B_u K) & X B_w & (C+D_u K)^T \\ (X B_w)^T & -\gamma^2 I & D_w^T \\ C+D_u K & D_w & -\gamma^2 I \end{bmatrix}}_{M(X, K)} < 0$$

unbekannt

$\Rightarrow$ Im Unterschied zur Analyse, ist bei der Synthese X und K unbekannt.
 $\leadsto$ nichtlinear

Idee:

Matrixungleichung umformulieren in LMI durch Einführung neuer Unbekannter

Transformation $N = \text{diag}(X^{-1}, I, I)$
 $X > 0 \Leftrightarrow X^{-1} > 0$

X^{-1} -Trick

$$N^T M N < 0:$$

$$N^T M N = \begin{bmatrix} (A+B_u \cdot k)X^{-1} + X^{-1}(A+B_u \cdot k)^T & B_w & C X^{-1} + D_w k \cdot X^{-1} \\ * & -\gamma I & D_w^T \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix}$$

Substitution : $Y = X^{-1}$
 $Z = K \cdot X$

A stabil und $\|P_{cl}\|_{\infty} < \gamma$

$\Leftrightarrow$
 $\exists Y > 0$ so dass $\begin{bmatrix} (AY + BZ)^T + (AY + BZ) & B_w & (CY + D_w Z)^T \\ * & -\gamma I & D_w^T \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$

$\Rightarrow$ LMI in Y und Z .

Rekonstruktion des Reglers : $u = Kx$, $K = ZY^{-1}$

Beweis : $V = x^T X x = x^T Y^{-1} x$ ist eine Lyapunovfkt. des Systems
 (Matlab : Yalmip & SeDuMi)

Zusammenfassung :

- Hoo-Loopshaping (Wahl der Gewichtungsfunktion)
- LMIs (Bounded Real Lemma)
 $\hookrightarrow$ wichtiges Werkzeug

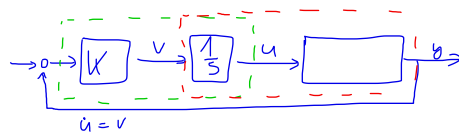
IV Einführung in die nichtlineare Regelung

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0 \quad \xrightarrow{u(t)} \boxed{x} \xrightarrow{y(t)} \downarrow x(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) & x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^q, y(t) \in \mathbb{R}^p \\ y &= h(x, u) & p = q = 1 \end{aligned}$$

Eingangs-affine Systeme: $\dot{x} = f(x) + g(x) \cdot u$
 $y = h(x) + g(x) \cdot u \quad \leadsto \text{DAE}$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x) \end{aligned}$$



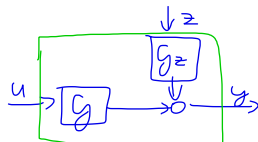
- ⊕ pos.: I-Anteil $\rightarrow$ keine bleibende Regelabweichung
- ⊖ neg.: Erhöhung des rel. Grads um 1

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x, u) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Annahme: $u_s \equiv 0, y_s \equiv 0$
 $x_s = 0 \Leftrightarrow 0 = f(0) \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} u_s \equiv 0, y_s \equiv 0 \\ x_s = 0 \end{matrix}} \right\} \text{o.B.d.A.}$

f, g, h glatt (bel. oft differenzierbar)

lin. Systeme:



2 Eingänge $\Rightarrow$ 2 rel. Grade.

besser: rel. Grad $z \rightarrow y >$ rel. Grad $u \rightarrow y$

rel. Grad: $u \rightarrow \boxed{} \rightarrow y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n)}$ in $y^{(n)}$ ist u "sichtbar"

$$\begin{aligned} y &= h(x) \\ \dot{y} &= \frac{d}{dt} h(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} \cdot \dot{x} = \underbrace{\frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x)}_{L_f h(x)} + \underbrace{\frac{\partial h(x)}{\partial x} g(x)}_{L_g h(x)} \cdot u \end{aligned}$$

vektoriell $\uparrow$ skalar

Lie-Ableitung
(Richtungsableitung)

$$\ddot{y} = L_f h(x) + L_g h(x) \cdot u$$

$$L_g h(x) \neq 0 \stackrel{r=0}{\Leftrightarrow} r=1$$

Definition: Der relative Grad ist die niedrigste Ableitung des Ausgangs, auf die der Eingang u direkt wirkt.

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \frac{d}{dt}(L_f h(x)) + \frac{d}{dt}(\overbrace{L_g h(x)}^{=0 \text{ aus } r \neq 1} \cdot u) \\ &= \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x} \cdot \underbrace{\dot{x}}_{=f+g \cdot u} + \frac{\partial (\cancel{L_g h(x)} \cdot u)}{\partial x} \cdot \underbrace{\dot{x}}_{=f+g \cdot u} \\ &= \underbrace{\frac{\partial L_f h(x)}{\partial x} f(x)}_{=L_f^2 h(x)} + \underbrace{L_g L_f h(x) u}_{\text{Skalar}} \\ &= L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x) \cdot u \end{aligned}$$

$$L_g h(x) = 0 \text{ und } L_g L_f h(x) \neq 0 \Leftrightarrow r=2$$

$$\ddot{y} = L_f^3 h(x) + L_g L_f^2 h(x) \cdot u$$

Satz: Berechnung des rel. Grads

Der rel. Grad r ist diejenige natürliche Zahl r , für die gilt:

- (i) $L_g L_f^k h(x) = 0$ für $k=0 \dots r-2$ in Umgebung der RL $x=0$
 (ii) $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$

Beispiel: relativer Grad für

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1^3 + x_1 x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1+x_1 \end{bmatrix} u$$

$$y = x_1$$

Bemerkung

Vektorieller rel. Grad f. MIMO-Systeme (Nicht Prüfungsrelevant)

$$r = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

$\leadsto$ Entkopplungsmatrix

Bemerkung: $L_g L_f^k h(x) = 0 \quad k=1 \dots r-2$
 $L_g L_f^{r-1} h(x) = 0$
 $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$ in Umgebung von $x=0$

nicht wohldefinierter relativer Grad

Beispiel: $\dot{x}_1 = x_1^3 + x_2 \cdot u$
 $\dot{x}_2 = x_1^2 + x_2^2$ $\rightarrow$ nicht wohldef. rel. Grad $r=1$
 $y = x_1$

Linearisierung: $\dot{x}_1 = 0$
 $\dot{x}_2 = 0$
 $y = x_1$

IV.2. Nichtlineare Koordinaten-trafo.

linear: $z = T x, \quad |T| \neq 0$

$$z = \Phi(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{bmatrix}$$

$\nwarrow$ Matrix
 $\nearrow$ Vektor

$$\dot{z} = \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \cdot \dot{x} \quad \leftarrow \text{mit } x = \Phi^{-1}(z)$$

Annahmen: (i) $0 = \Phi(0)$
(ii) $\Phi(x)$ ist invertierbar, d.h. $\Phi^{-1}(\Phi(x)) = x$
(iii) Φ, Φ^{-1} sind bel. oft stetig differenzierbar } Diffeomorphismus

Satz: $\text{rg} \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \Big|_{x=0} = n \Rightarrow$ lokaler Diffeomorphismus in Umgebung von $x=0$

Beispiel: $z = \Phi(x) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 1 - e^{x_2} \end{bmatrix}$

Prüfen: (i) $\checkmark$
(ii), (iii) $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=0} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -e^{x_2} \end{bmatrix}_{x=0} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg} = 2 \Rightarrow \text{lok. Diff.}$

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{S_x} & \xrightarrow{z = \Phi(x)} & \boxed{S'_z} \\
 \downarrow \text{Jacobi-lin.} & ? & \downarrow \text{Jacobi-lin.} \\
 \boxed{\Delta S_x} & \xrightarrow{z = T x} & \boxed{\Delta S'_z}
 \end{array}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=0} = T$$

JA!

$\Rightarrow$ Diffeom. und Jacobi-lin. kommutieren!

IV.3 Byrnes/Isidori Normalform (BNF)

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = z = \Phi(x) = \begin{bmatrix} y \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ L_f^2 h(x) \\ \vdots \\ L_f^{r-1} h(x) \\ \bar{\Phi}_{r+1}(x) \\ \vdots \\ \bar{\Phi}_n(x) \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} r \\ n-r \end{array} \right\}$$

Annahme: rel. Grad r

$$\begin{aligned}
 y &= z_1 \\
 \dot{z}_1 &= \underbrace{\frac{\partial h}{\partial x} f(x)}_{L_f h(x)} + \underbrace{\frac{\partial h}{\partial x} g(x)}_0 \cdot u \\
 &= z_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_2 &= \underbrace{L_f^2 h(x)}_{x_3} + \underbrace{L_g L_f h(x)}_0 \cdot u \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

$$\dot{z}_{r+1} = z_r$$

$$\dot{z}_r = L_f^r h(x) + \underbrace{L_g L_f^{r-1} h(x)}_{\neq 0} \cdot u$$

rel.-grad und wohldefiniertheit
hier ablesbar.

$$\dot{z}_{r+1} = \frac{\partial \bar{\Phi}_{r+1}(x)}{\partial x} [f(x) + g(x) \cdot u]$$

$$= L_g \bar{\Phi}_{r+1}(x) + L_f \bar{\Phi}_{r+1}(x) \cdot u$$

$\vdots$

$$\dot{z}_n = L_f \bar{\Phi}_n(x) + L_g \bar{\Phi}_n(x) \cdot u$$

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \cdot u$$

$$y = h(x)$$

$$z = \Phi(x)$$

$$\text{BL-NF: } z = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ y^{(r-1)} \\ \Phi_{r+1} \\ \vdots \\ \Phi_n \end{bmatrix}$$

$$y = z_1$$

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\vdots$$

$$\dot{z}_{r-1} = z_r$$

$$\dot{z}_r = a(z) + b(z) \cdot u$$

$$\dot{z}_{r+1} = \Phi_{r+1}(z) + p_{r+1}(z) \cdot u$$

$$\dot{z}_n = \Phi_n(z) + p_n(z) \cdot u$$

$\Phi_{r+1} - \Phi_n$ immer so wählbar, dass Φ Diffeomorphismus

SISO:

Es existieren immer Φ_{r+1}, Φ_n so dass $p_{r+1} \dots p_n = 0$ gewählt werden kann.

Eingangsnormalisierte BI-NF

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_r = a(z) + b(z) \cdot u$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_{r+1} &= q_{r+1}(z) \\ \dot{z}_n &= q_n(z) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{interne} \\ \text{Dynamik} \end{array}$$

$$y = z_1$$

Beispiel:

$$y = x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_1 = -x_2^2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + u$$

$$u=0: \quad L_g h(x) = [1 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \quad \Rightarrow r=1$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ \varphi_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

-

$$y = z_1$$

$$\dot{z}_1 = \dot{y} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = -x_2^2 - x_1 + u$$

$$\dot{z}_2 = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \cdot x_2^2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} (-x_1 + u)$$

$$\text{eingangsnorm. BI-NF} \Rightarrow \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \varphi_2 \neq f(x_2)$$

$$\Rightarrow \text{B. Diffeomorphismus} \Rightarrow \varphi_2(x_1, x_2) = x_1$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{z}_2 = -x_2^2$$

$$\Rightarrow y = z_1$$

$$\dot{z}_1 = -x_2 + x_1 + u$$

$$\dot{z}_2 = -x_2^2$$

$$\text{Inverse } \Phi: \quad \begin{aligned} x_1 &= z_2 \\ x_2 &= z_1 - z_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y = z_1$$

$$\dot{z}_1 = -(z_1 - z_2)^2 - z_2 + u$$

$$\dot{z}_2 = -(z_1 - z_2)^2$$

IV.4 Nulldynamik

Beispiel:

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)} \quad \leadsto \text{Folien}$$

$$u(t) = e^{-t}$$

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s+1}$$

$$y(s) = \frac{s+1}{s(s+2)} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s(s+2)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{y(s)\} = y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2t}$$

Definition: Übertragungsnulstellen bei z_k , wenn $\exists u_k, x(0) = \xi$ sodass $\forall t \geq 0$

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B \cdot u_k \cdot e^{z_k t}$$

$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u_k \cdot e^{z_k t}$$

$$\text{und } y(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

$$\text{Für } y=0: C x(t) + D \cdot u_k \cdot e^{z_k t} \equiv 0$$

$$\Rightarrow x(t) = p \cdot e^{z_k t}$$

$$\text{Aus } x(0) = \xi \Rightarrow p = \xi$$

$$\Rightarrow x(t) = \xi e^{z_k t}$$

$$\begin{aligned} \xi \cdot z_k \cdot e^{z_k t} &= A \cdot \xi \cdot e^{z_k t} + B \cdot u_k \cdot e^{z_k t} \\ - C \cdot \xi \cdot e^{z_k t} - D \cdot u_k \cdot e^{z_k t} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} z_k I - A & -B \\ -C & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{lin. Algebra: } A \cdot v_i = \lambda_i v_i$$

$$(\lambda_i I - A) \cdot v_i = 0$$

$$|\lambda_i I - A| = 0$$

$$A \cdot s_i = M \cdot s_i \Rightarrow |M| = 0$$

$$(M_i \cdot M - A) \cdot s_i = 0$$

Verallg. EW-Problem

$$\text{Anzahl: } 0 \leq \text{Verallg. EW} \leq n$$

Beispiel: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$c^T = [1 \quad 1], d = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} z_k & -1 & 0 & z_k = -1 \\ 0 & z_{k+2} & -1 & \\ 1 & -1 & 0 & \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -\xi_1 - \xi_2 &= 0 \Rightarrow \xi_1 = -\xi_2 \\ \xi_2 - u_k &= 0 \Rightarrow u_k = \xi_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, u_k = -1$$

$$\xrightarrow{u = -1 - e^{-t}} \boxed{} \xrightarrow{\downarrow x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}} y \equiv 0$$

$$g(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$$

Zusammenhang NS alt + neu

Satz: $G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = c^T (sI - A)^{-1} b + d$

z_k sei Lösung von $\det \begin{bmatrix} z_k I - A & -B \\ -c & -d \end{bmatrix} = 0$
Dann gilt $G(z_k) = 0$.

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ c & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D - cA^{-1}B) \quad \text{Schur-Formel}$$

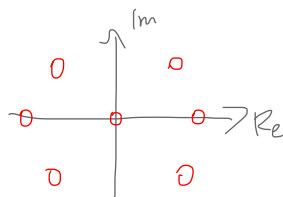
↳ Beweis: $\underbrace{\det \begin{bmatrix} I & 0 \\ -cA^{-1} & I \end{bmatrix}}_{=1} \det \begin{bmatrix} A & B \\ c & D \end{bmatrix} = \underbrace{\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - cA^{-1}B \end{bmatrix}}_{\det(A) \cdot \det(D - cA^{-1}B)} \quad \square$

$$\det \begin{pmatrix} z_k I - A & -b \\ -c^T & -d \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \det(z_k I - A) \cdot \det(-d - [-c^T (z_k I - A)^{-1} b]) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\det(z_k I - A)}_{\neq 0} \cdot (-1) \cdot [-c^T (z_k I - A)^{-1} b + d] = 0$$

Annahmen: SISO, Pole $\neq$ NS, A^{-1} existiert

$$\Leftrightarrow G(z_k) = 0 \quad \square$$



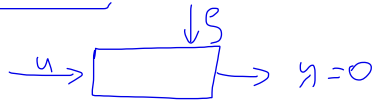
Satz: Die NS eines Systems (A, b, c^T, d) sind invariant unter Konst. Ausgangsfeedback. $u = -ky + v$

↳ Beweis: $\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + by \\ y &= c^T x \end{aligned} \quad \leadsto \det \begin{pmatrix} z_k I - A & -b \\ -c^T & 0 \end{pmatrix} = 0$

Feedback: $\begin{aligned} \dot{x} &= (A - bkc^T)x + bv \\ y &= c^T x \end{aligned} \quad \leadsto \det \begin{pmatrix} z_k I - A + bkc^T & -b \\ -c^T & 0 \end{pmatrix} = 0$

$$\det \begin{bmatrix} z_k I - A + bkc^T & -b \\ -c^T & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} z_k I - A & -b \\ -c^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} I & 0 \\ -kc^T & I \end{bmatrix}$$

IV.4 Nulldynamik



$$y = z_1$$

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$\vdots$

$$\dot{z}_{r-1} = z_r$$

$$\dot{z}_r = a(z) + b(z) \cdot u$$

$$\dot{z}_{r+1} = q_{r+1}(z)$$

$$\dot{z}_n = q_n(z)$$

$$y = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0 \Leftrightarrow \dot{z}_1 = 0 \Leftrightarrow z_2 = 0 \dots$$

$$u = \frac{1}{b(z)} \cdot (-a(z))$$

$$\text{d.h. } y(t) \equiv 0 \text{ f\"ur } z_1(0) = z_2(0) = \dots = z_r(0) = 0 \text{ f\"ur } u = \frac{1}{b(z)} \cdot (-a(z))$$

Definition: F\"ur ein nichtlin. system in eingangsh. BNF mit rel. grad r wird

$$\dot{z}_{r+1} = q_{r+1}(z) \quad | \quad z_1 = \dots = z_r = 0$$

$\vdots$

$$\dot{z}_n = q_n(z) \quad | \quad z_1 = \dots = z_r = 0$$

als Nulldynamik bezeichnet.

Beispiel:

$$y = x_1 - 2x_2$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1^3 - 2x_2 + u$$

Tr\"afo auf BNF:

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ \phi_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow y = z_1$$

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_1 - 2\dot{x}_2 = x_2 + 2x_1^3 + 4x_2 - 2u$$

$$\dot{z}_2 = \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} (-x_1^3 - 2x_2 + u)$$

$$\text{BNF: } \phi_2 \neq f(x_2) \Rightarrow \phi_2 = x_1$$

$$\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad \mathbb{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} z_2 \\ -\frac{1}{2}(z_1 - z_2) \end{bmatrix}$$

$$\dot{z}_1 = \frac{5}{2}(z_2 - z_1) + 2z_2^3 - 2u$$

$$\dot{z}_2 = \frac{z_2 - z_1}{2}$$

$$y = z_1$$

$$\Rightarrow \text{Nullodynamik} \quad \dot{z}_2 = \frac{z_2 - 0}{2} = \frac{1}{2} \cdot z_2 \quad \text{inst. Nullodyn.}$$

- Bemerkungen:
- Bedeutung analog zum lin. Fall
 - EW der Jacobi-lin d. Nullodynamik $\hat{=}$ KS des lin. Systems
 - Wenn Nulldyn. instab., dann spricht man von einem nicht-minimalphasigen System
 - Nulldyn. kann in Originalkoord. geschrieben werden
 - Instab. Nulldyn. erschwert Reglerentwurf
 - MIMO analog

Bisherige: $\dot{x} = f(x) + g(x) \cdot u$
 Nomenklatur: $y = h(x)$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t), y(t) \in \mathbb{R}$
 $x(0) \in L_2$

$$\begin{aligned} y &= z_1 \\ \dot{z}_1 &= z_2 \\ &\vdots \\ \dot{z}_r &= a_1(z) + b_1(z) \cdot u \\ \dot{z}_{r+1} &= q_{r+1}(z) \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= q_n(z) \end{aligned}$$

Beweis: $g(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{n-r} s^{n-r}}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n} \quad r > 0$

$$NS: \frac{b_0}{b_{n-r}} + \frac{b_1}{b_{n-r}} s + \dots + s^{n-r} = 0$$

Zustandsraumdarstellung (RNF):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-r} & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c^T = [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n-r} \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

Trafo auf BINF:

$$z = \Phi(x) = \begin{bmatrix} c^T x \\ c^T A x \\ \vdots \\ c^T A^{r-1} x \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\xi := \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix}$$

$$\eta := \begin{bmatrix} z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= z_1 \\ \dot{z}_1 &= z_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\dot{z}_r = u^T \xi + u^T \eta + c^T A^{r-1} b u$$

$$\dot{z}_{r+1} = \dot{x}_1 = x_2 = z_{r+2}$$

$$\dot{z}_{r+2} = \dot{x}_2 = x_3 = z_{r+3}$$

$\vdots$

$$\dot{z}_n = \dot{x}_{n-r} = x_{n-r+1} = \frac{1}{b_{n-r}} \left[\underbrace{c^T x}_{z_1} - \underbrace{b_0 x_1}_{z_{r+1}} - \underbrace{b_1 x_2}_{z_{r+2}} - \dots - \underbrace{b_{n-r-1} x_{n-r}}_{z_n} \right]$$

aus $y = c^T x$

Nulldynamik: $z_1 = \dots = z_r = 0$

Probleme:

- a) $b(z) = L_f L_f^{r-1} a(x) \neq 0 \Rightarrow$ wohldef. rel. Grad nötig?
b) Interne Dynamik im geschl. Kreis ist nicht beobachtbar
 $\rightarrow$ asymp. Stabilität Nulldyn. nötig

Satz:

Wenn S

i) einen nicht wohldef. Grad r besitzt

ii) minimalphasig ist

wird das E/A-Verhalten von S durch die statische Zustandsrückführung

$$u = \frac{V - L_f^r h(x)}{L_f L_f^{r-1} h(x)} - \frac{\sum_{k=1}^r \beta_{k-1} L_f^{k-1} h(x)}{L_f L_f^{r-1} h(x)}$$

exakt linearisiert. Das E/A-Verhalten wird durch $g(s) = \frac{1}{s^r}$ beschrieben.

Vorgehen:

$$\dot{z}_r = V - \beta_{r-1} z_r - \dots - \beta_1 z_2 - \beta_0 z_1$$

$$u = \frac{1}{b(z)} (-a(z) + V - \beta_{r-1} z_r - \dots - \beta_2 z_1 - \beta_0 z_1)$$

$$\hookrightarrow g(s) = \frac{1}{s^r + \beta_{r-1} s^{r-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}$$

Beispiel:

$$y = x_2$$

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = e^{x_1 x_2} \cdot x_1 + \sin(x_2) + (1 + x_1^2) u$$

rel. Grad: $r = 1$

Nullodynamik: $\dot{x}_1 = -x_1^3$ global asymp. stabil

$$u = \frac{1}{1+x_1^2} \left(\underbrace{-e^{x_1 x_2} \cdot x_1 - \sin(x_2)}_{\substack{\text{nichtlineareit} \\ \text{kompensiert}}} + \underbrace{V - x_2}_{\substack{\uparrow \\ \text{generieren}}} \right)$$

$$\Rightarrow g(s) = \frac{1}{s+1} \quad (\text{PT}_1\text{-Glieder mit Pol bei } -1)$$

Bemerkung:

- regional, ev. global
- Zustandsrückführung
- Trafo auf BMF nie nötig (feedback in Originalkoordinaten geg.)
- i.A. nicht robust
- Robustheit bei $r=1$
- ev. großer Stellaufwand nötig
- MIMO; analog
- Entkopplungsmatrix nicht singulär
- viele Erweiterungen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x) \cdot u \quad \rightarrow \quad \dot{x} = Ax + Bu & x(t) \in \mathbb{R}^n \\ y_{\text{int}} &= h(x) \\ r &= n\end{aligned}$$

IV.6. Exakte Zustandslinearisierung

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \cdot u, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n$$

ist in $\dot{x} = Ax + Bu, x(t) \in \mathbb{R}^n$ exakt überführbar, wenn ein virtueller Ausgang $y = r(x)$ (Linearisierender Ausgang) existiert, so dass rel. Grad $r=n$ ist.

↑ flacher Ausgang

Flacher Ausgang existiert nur selten (Involutivitätsbedingung)

IV.7. Asymptische Folgeregelung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{\text{ref}}(t) \in C^\infty \text{ (glatt)}$$

$$\text{genauer: } e(t) = y(t) - y_{\text{ref}}(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

$$e^{(n)} + \beta_{n-1} e^{(n-1)} + \dots + \beta_1 \dot{e} + \beta_0 e = 0$$

$$\begin{aligned}y &= z_1 \\ \dot{z} &= \ddot{y} \stackrel{!}{=} \ddot{y}_{\text{ref}} - \sum_{i=1}^n \beta_{i-1} (\ddot{y}^{(i-1)} - \ddot{y}_{\text{ref}}^{(i-1)}) \stackrel{!}{=} a_1 z_1 + b(z_1) \cdot u\end{aligned}$$

$$u = \frac{1}{g(x)^{-1} h(x)} \left(-L_f h(x) + \ddot{y}_{\text{ref}} - \sum_{i=1}^n \beta_{i-1} (\ddot{y}^{(i-1)} - \ddot{y}_{\text{ref}}^{(i-1)}) \right)$$

IV. 8. Störerkopplung



$$\dot{x} = f(x) + g(x) \cdot u + p(x) \cdot d$$

$$y = h(x)$$

r sei relativer Grad bzgl. u
 r' " " " " d

1. Fall: $r' > r$: $y = z_1$

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = z_3$$

$\vdots$

$$\dot{z}_r = L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x) \cdot u$$

$$\dot{z}_{r+1} = f(x, u, d)$$

E/A-Linearisierung erzielt eine Störerkopplung

2. Fall: $r' = r$ $\dot{z}_r = L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x) \cdot u + L_p L_f^{r-1} h(x) \cdot d$

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} [-L_f^r h(x) + v - L_p L_f^{r-1} h(x) \cdot d]$$

Falls d messbar, dann ist Störgrößenaufschaltung möglich.

3. Fall: $r' < r$: Keine Störgrößenaufschaltung möglich. E/A-Linearisierung sollte nicht angewendet werden.